This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Hindi Krp 2
13 C 89



ओमिकम्

# घनक्षेत्रमिति

और

गणिताख्य कोष

# SOLID-GEOMETRY

with

A Vocabulary of mathematical terms in Sanscrit and English

अङ्गरेजी से हिन्दी भाषा मे

पण्डित कृपाराम गणिताध्यापक द्वारा अनुवादित

TRANSLATED FROM ENGLISH INTO HINDEE BY PANDIT KRIPARAM

Assistant Professor of mathematics in Lahore Oriental College

पञ्जाब महाविद्यालय की सहायता से प्रकाशित

*Published under the auspices of the Panjáb University College*

लाहोर

मित्रविलास और शिक्षा सभा यन्त्र मे पण्डित मुकुन्दराम के द्वारा मुद्रित

Lahore

1873

इस पुस्तक की रजस्टरी हुई है अनुवादकर्त्ता की अनुमति बिना कोई इसे न छापे

Registered under Act 20 of 1847

मूल्य प्रतिपुस्तक १ रुपया

Price 1 Rupee per Copy

# भूमिका

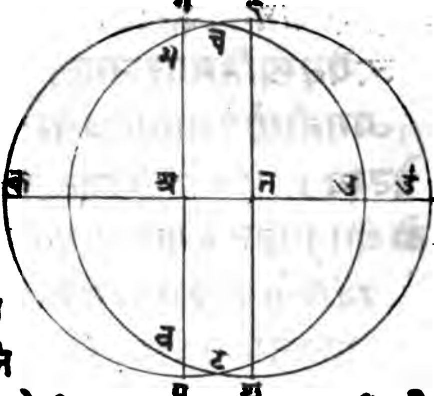
इहां इस ग्रन्थ के पहिले अध्याय से छठे अध्याय तक तलज्यामिति के प्रथम द्वितीयादि अध्यायों के नाम से और ग्यारवे से घनज्यामिति के प्रथमादि अध्यायों के नाम से व्यवहार कियागया है। विदित हो कि हिन्दी मे इस ग्रन्थ के पान्चवें अध्याय का पूरा अनुवाद अबतक नहिं हुआ। परन्तु पान्चवें और छठे अध्यायों के अनुवाद करने वाले महाशयवरों ने पान्चवें अध्याय के प्रतिनिधि साध्यों वत उन्नीस परिभाषा बनाकर छठे अध्याय के आदि मे नियुक्त की हैं; और उनहि द्वारा उनोने छठे अध्यायस्थ साध्यों को उपपन्न किया है। इसहेतु इस अध्याय मे भी जहां कहीं किसी साध्य के उपपन्न करने के अर्थ पान्चवें अध्यायस्थ साध्यों वा परिभाषाओं का उपयोग पड़ा है वहां मैने भी उनहि उन्नीस परिभाषाओं द्वारा उस साध्य को उपपन्न किया है अर्थात् छठे अध्याय की न्याई यहां भी पान्चवें अध्याय से विनाहि सब साध्य उपपन्न किये गये हैं। प्रकट हो कि अभीष्ट साध्य की उपपत्ति दिखलाने के अर्थ जो किसी अध्याय के किसी साध्य की आवश्यकता होतो वह () ऐसे कोष्ट के भीतर ग्रन्थ मूल मेहि लिखा जायगा। यथा जहां पहिले अध्याय के तेतीसवें साध्य से आवश्यकता पूरी होसक्ती है, वहां उसके बोधनार्थ (त·ज्या·१, ३३ सा·से) ऐसा कोष्ट ग्रन्थमूल के यथोचितस्थान मे नियुक्त किया जायगा, जहां पहिले अध्याय के बत्तीसवें साध्यके दूसरे अनुमान से आवश्यकता पूरीहो, वहां (त·ज्या·१, ३२ सा·अ·) ऐसा कोष्ट अभीष्टस्थानमे उपयुक्त किया जायगा; जहां छठे अध्याय की साध्यवत ग्यारवी परिभाषासे आवश्यता पूरी हो, वहां (त·ज्या·६, ११ सा प·से) ऐसा कोष्ट मूल मे लिखा जायगा; तथा जहां ग्यारवें अध्याय वा घनज्यामिति के पहिले अध्यायके साध्यक के अनुमान से आवश्यकता पूरी हो, वहां

(क्षे·ग्या·१, आसाधक, अ·से) ऐसा कोष्ठ ग्रन्थमूल मे निवेशित कियाजायगा। वस्तुतः ( )यह कोष्ठ ग्रन्थमूल मे नहि गिनाजायगा; परन्तु टीकाकी न्याई मूलपाठकी सत्यताको जितलाने वाला होगा। ( )इस कोष्ठसे बिना जो कहीं { }, {( )±( )}, [ ] इत्यादि और प्रकारोंके कोष्ठ अथवा चिह्न हैं वे सब अपने२ यथार्थ अर्थोंके सहित मूल ग्रन्थ मे मिले रहेंगे अर्थात्: वे सब ( )इस कोष्ठकी न्याई मूलग्रन्थ से पृथक् नहि गिनेजायगें। अतः गणितारख्यकोशमे लिखेगये तल, समधरातल, और दर्पणोदरधरातल इन एक पर्य्याय वाचक तीन शब्दोमे से औरोंकी अपेक्षा तल शब्दका अर्थ इनसे अभीष्ट पदार्थ सम्बन्धि यथार्थ अर्थके बहुत समीप है। अतः इहांतल शब्दकाहि व्यवहार बहुधा कियागया है। वरन उसका यथार्थ अर्थ तो समतल है; परन्तु हमने लाघवार्थ समतलके स्थान मे तल शब्दका व्यवहार करनाहि अच्छा समझा है। क्योंकि इस तल शब्दके व्यवहार से इस अध्याय सम्बन्धि पारिभाषिक शब्दोंके अर्थ भी अपने२ से अभीष्ट पदार्थ सम्बन्धि यथार्थ अर्थोंके समीपवर्ति होसक्ते हैं। यथा इस अध्यायमे व्यवहृत कियेगये तलज्यामिति समानान्तर बहुतल, बहुत, और समास्थतल इत्यादि पारिभाषिक शब्दोंके अर्थ प्रायः इनसे अभीष्ट पदार्थ सम्बन्धि यथार्थ अर्थोंके समीपवर्त्तिहि हैं।

गणितारख्यकोशमे नियुक्त कियेगये स्पर्शरेखा और सम्पातरेखा इन एक पर्य्याय वाचक दो शब्दोंमे से सम्पातरेखाका अर्थ इनसे अभीष्ट पदार्थ सम्बन्धि यथार्थ अर्थके विपरीत, और स्पर्शरेखाका अर्थ इनसे अभीष्ट पदार्थसम्बन्धि यथार्थ अर्थकाहि वाचक है। इसलिये हमने सम्पातरेखा शब्दका सर्वथा त्याग और स्पर्शरेखा शब्दकाहि सर्वथा व्यवहार करना उचित समझा है। क्योंकि सम्पात शब्दका अर्थ काटना और संपातरेखा शब्दका अर्थ काटनेवाली रेखा है; सो हमे अभीष्ट नहि है।

हमे तो स्पर्शकरने वाली रेखा अभीष्ट है, जो कि स्पर्श रेखाका ठीक अर्थ है। अपरंच गणित सम्बन्धि संस्कृत ग्रन्थोंमे भी स्पष्ट देखने मे आताहै कि रेखा और वृत्तके परस्पर काटने तथा वृत्तोंके परस्पर काटने मेहि सर्वथा सम्पात शब्दका व्यवहार किया जाताहै; अन्यत्र नाहि। यथा सिद्धान्तशिरोमणी के गोलाध्यायस्थ छेद्यकाऽधिकारमे लिखाहै। त्रिभज्यकासम्मितकर्कटेन कक्षाख्यवृत्तम्प्रथमं विलिख्य तन्मध्यतोमध्यमखेटभुक्ति तिथ्यंशमानेनमहीं सुवृत्ताम्। कक्षाख्यवृत्तेभगणांकितेत्र दद्यात्खेटौक्रियतोथरेखा कुमध्यतस्तूपरिगाविधेया तिर्य्यक्ततोऽन्यास्वधियाकुमध्यो उच्चोन्मुखीमन्त्यफलज्यकाच्च दद्यात्कुमध्याद्विलिखेत्तदग्रे त्रिभज्ययैवप्रतिमण्डलाख्यं सैवोच्चरेखापरात्रतीर्य्यक् कक्षामध्यगतीर्य्यग्रेखाप्रतिवृत्तसम्पाते मध्येवातिस्पष्टपरंफलन्नात्र खेटस्य। भावार्थ। त्रिज्यातुल्यकर्कटक से अभीष्ट ग्रह के कक्षावृत्त को और उसवृत्त के मध्य (अर्थात् केन्द्र) से उसग्रह की मध्यम गति के पंद्रहवें हिस्से की दूरी पर सुवृत्ताकार पृथ्वीको बनाकर; फेर राशि, अंश, और कलादियों से अंकित किये हुए उस कक्षावृत्त मे मेखादि से यथा स्थान उसग्रह के उच्च और उस ग्रहको स्थापितकर कुमध्य (अर्थात् भूस्थानकेन्द्र) और उच्च पर होकर जाने वाली उच्चरेखा संज्ञक रेखा, तथा कुमध्य मे उच्चरेखा पर लम्बरूपी और एक कक्षामध्यग तीर्य्यग्रेखा संज्ञक रेखा करलो। कुमध्यसे उच्चकी ओर उसग्रहकी अंत्यफलज्या देकर उसके अग्र (अर्थात् कुमध्यसे उच्चकी ओर अंत्य फलज्या समदूरी) मे केन्द्र मानकर मस्कृत त्रिज्यासे बनाये गये प्रतिवृत्त मे उच्च रेखातो वहिजानती, और इसके केन्द्र मे पूर्ववत् दूसरी तीर्य्यग्रेखाकरो। कक्षावृत्त मध्यगतीर्य्यग्रेखा और प्रतिवृत्तके सम्पात (अर्थात्प्रत्येक संपात) मे ग्रहकी मध्यमगति हि स्पष्टगति (अर्थात् स्पष्टगति मध्यमगति के तुल्य)

होति है। वहांहि ग्रहका परमफल (अर्थात् एक सम्पातमे ग्रहका धन परमफल और दूसरे मे ऋण परम फल) होताहै। जैसे। यतः हर ग्रह की हर प्रकारकी अंत्यफल ज्या त्रिज्या से छोटी होतीहै। अतः प्रवकल्प नाकरोंकि अ केन्द्र मानकर अक त्रिज्यासे कगचउटप कक्षा वृत्त बना है, कि जिसमे च मेषादिसे यथोचित स्थान पर अभीष्ट ग्रह सम्बन्धि उच्च, कअउ उच्च रेखा, गअप कक्षामध्यगतीर्य्यग्रेखा की है; तथा अ केन्द्र से उ उच्च की ओर दी गई अअ अंत्यफलज्या के न अग्र को केन्द्र मानकर उक्त त्रिज्या सम त्रिज्यासे ऊथटबभचद प्रतिवृत्त बनाहै, कि जिसमे चहि कअनउऊ उच्चरेखा; और दनथ तीर्य्यग्रेखा है। तो निस्संदेह प्रतीत होताहै कि उन दोनो वृत्तोंके अ और न केन्द्र प्रत्येक वृत्त के भीतर रहेंगे। इससे स्पष्ट है कि कअउ उच्चरेखागत अ केन्द्रमे जाने वाली कक्षा मध्यग तीर्य्यग्रेखा उन दोनो वृत्तों को ग, प, भ, और ब विन्दुओं (अर्थात् कक्षावृत्तको तो ग और प; प्रति




वृत्तको भ और ब विन्दुओं) पर काटेगी। परन्तु कदापि काल किसी वृत्त पर स्पर्श नहि करेगी। इस से अति प्रकट है कि ऊथटबभचद प्रति वृत्त और गअप कक्षामध्यगतीर्य्यग्रेखा के परस्पर काटने मेंहि संपात शब्दका व्यवहार कियागया है। फेर सिद्धान्तशिरोमणी के गोलाध्याय मे वलन वासना के अर्थ जो लिखा है कि

**तुलाजाद्योर्हि संपाते विषवत्क्रान्ति वृत्तयोः।**
**स्थानांयाम्योत्तरेभिन्ने पराक्रान्त्यन्तरे चते ॥**

भावार्थ। तुलराशि के आदि और मेषराशि के आदिमे जहां विषुवत और क्रान्तिवृत्तोंके संपात (अर्थात् जहां वे वृत्त एक

तुलादि मे दूसरा मेषादि मे परस्पर काटते) हैं वहां उन की दक्षिण और उत्तर दिशा परम क्रान्ति के अन्तर से पृथक् होती है (अर्थात उन की दक्षिण दिशाओं मे तथा उत्तर दिशाओं मे परम क्रांति समान अन्तर होता है)। जैसे। जब कल्पना करे कि कगचउटप विषुवत वृत्त और उथटवभचद क्रान्तिवृत्तों के ट तुलादि और च मेषादि में संपात (अर्थात् काट वा छेद) होते हैं। तब ट और च सम्पात स्थानो (अर्थात् काटे गये स्थानो) मे उन की दक्षिण दिशाओं का अन्तर, तथा उत्तर दिशाओं का अन्तर परम क्रांति के तुल्य होगा। इस कथन से केवल यही प्रयोजन है कि रेखा और वृत्त के स्पर्श करने वा वृत्त और वृत्त के स्पर्श करने मे सम्पात शब्द का व्यवहार कहिं किया गया देखने मे नहि आता; परन्तु रेखा और वृत्त के परस्पर काटने वा वृत्त और वृत्त के परस्पर काटने मे हि (जैसे कि प्रस्तुत लिपि से प्रकट है वैसे) सम्पात शब्द का व्यवहार किया गया देखने मे आता है। ऐसे और भी शतशः उदाहरण मिलते हैं। तथा श्रीकाशीनिवासी गणित शास्त्राध्यापक मान्यवर्य श्रीबापूदेव शास्त्री जी भी अपने त्रिकोणमिति नामक ग्रन्थ मे स्पर्शरेखा शब्द का हि व्यवहार करते हैं; और स्पर्शरेखा शब्द का अर्थ भी इस से अभीष्ट पदार्थ के यथार्थ अर्थ से मिलता है। इस हेतु हमने भी इस सार्थिक स्पर्श रेखा शब्द का व्यवहार करना हि अच्छा समझ कर इसी शब्द को अपने गणिताख्य कोश मे मुख्य किया है; और उस अनर्थक सम्पात रेखा शब्द को इस कोश मे लिखकर काट दिया है; कि जिस से सब को विदित हो कि इस अनर्थक शब्द का व्यवहार न करना चाहिये।

# ओम

## तत्सत

१ पिंड उसे कहते हैं जिसमे लम्बाई, चौड़ाई, और मुटा-
ई भी हो।

२ पृष्ठ वा धरातल उसे कहते हैं जो किसी पिण्ड को
बनाता वा उस पर उसकी अवधि करता है।
इस परिभाषा से सिद्ध होता है कि पिंड की सीमा पृष्ठ वा धरात-
ल होते हैं।

३ किसी तल पर लम्ब वह सरल रेखा होती है जो उस
तल से मिली हुई हरएक रेखा के योग से समको-
ण बनावे।

४ एक तल दूसरे तल पर लम्ब होगा। जब उन त-
लों के मिश्रच्छेद पर एक तल मे खेंची गई लम्ब-
रेखा दूसरे तल पर लम्ब हो।
दो तलों का मिश्रच्छेद वह रेखा है जिसमे वे एक दूसरे को का-
टते हैं; जब वे एक दूसरे के आर पार गत होते हैं।

५ एक तल पर एक रेखा का नावण्य वह कहलाता है

५ एक तल पर एक रेखा का आवण्य वह कहलाता है जो उस रेखा गत किसी विन्दुसे उसतल पर किये गये लम्ब के मूलसे उसी रेखा के मूल तक खेंची गई रेखा और पूर्वोक्त रेखासे न्यून कोण बनता है।

६ एकतल पर दूसरे तलका आवण्य उसे कहते हैं जो उन दो तलोंके मिश्रछेद गत किसी एकहि विन्दुसे प्रत्येक तलमे उसी छेद पर खेंची गई लम्ब रेखाओं से न्यून कोण बनता है।

७ पहिले दो तल और दूसरे दो तल एकहि आवण्य वाले तब कहलाते हैं। जब उनमे आवण्य के कोण समान हों।

८ समानान्तर तल वे कहलाते हैं जो हर ओर अनन्त दूर तक बढ़ाने से भी नमिलें।

९ पिण्डीय कोण उसे कहते हैं जो दो से अधिक उन तलीय कोणों से बनाया जाय जो भिन्न २ तलों मे हों और किसी एकहि विन्दुमे मिलते हों।

१० तुल्य और सजातीय पिण्ड वे कहलाते हैं जो यथा क्रम उन तुल्य संख्यक सजातीय तुल्य तलोंसे बनाये जांय कि जिनके आवण्य यथा क्रम समान हों॥

११ सजातीय पिण्ड वे कहलाते हैं जो तुल्य संख्यक सजातीय तलों से बनाये जांय और उन के पिण्डीय कोण भी यथा क्रम समान हों।

१२ सूची उस पिण्ड को कहते हैं जो एक तल और एक बिन्दु के बीच मे कई एक और तलोंके मिलने से बनता है। उस पूर्वोक्त तलको उस सूची का आधार और उस बिन्दु को शिखर कहते हैं।
प्रायः आधार तल मे जितने कोण होते हैं वह सूची भी उन कोणोंसेहि उच्चार्य्यमान होती है। यथा आधार त्रिकोण क्षेत्र है तो उस सूची को त्रिकोण सूची कहेंगे आधार चतुष्कोण वा पञ्चकोण क्षेत्र हो तो वह सूची भी चतुष्कोण सूची वा पञ्च कोण सूची कहलावेगी।

१३ समानान्तर तल उस पिण्ड को कहते हैं जिसके ऊपर के सन्मुख के दो २ तल सजातीय, समान और समानान्तर हों, और शेष तल समानान्तर चतुर्भुज हों।

१४ गोल उस पिण्ड को कहते हैं जो व्यास के समन्तात् हृत्ताई के भ्रमण करने से बनता है।

१५ जिस सरल रेखा के समन्तात् हृत्ताई के घूमने से गोल बनता है वह रेखा उस गोल का अक्ष कहलाती है।

१६ उस घूमने वाले हृत्ताई का जो केन्द्र है वही उस

गोल का केन्द्र होता है।

१७ गोल के केन्द्र मे हो कर जाने वाली सरल रेखा जो उस गोल की पृष्ठ मे समाप्त होती है, वह उस गोल का व्यास कहलाती है।

१८ शंकु उसे कहते हैं जो किसी समकोण त्रिभुज को समकोण बनाने वाली किसी निर्दिष्ट भुज के समन्तात् भ्रमण कराने से बनता है। जब वह निर्दिष्ट भुज समकोण बनाने वाली दूसरी भुज के समान हो तो वह समकोण शंकु, छोटी हो तो अधिक कोण शंकु, और बड़ी हो तो न्यून कोण शंकु कहलावेगा।

१९ जिस निर्दिष्ट रेखा के समन्तात् उक्त त्रिभुज के घूमने से शंकु बनता है वह रेखा उस शंकु का अक्ष कहलाती है।

२० शंकु का आधार एक वृत्त होता है जो त्रिभुज के समकोण बनाने वाली भुजा के घुमाने से बनाया जाता है।

२१ आयत की किसी निर्दिष्ट भुजा के समन्तात् उस आयत के घूमने से जो एक पिण्ड बनता है उसे मदना कृति कहते हैं।

२२ जिस सरल रेखाके समन्तात् आयत के घूमने से मदनाकृति बनता है वह रेखा उस मदनाकृति का अक्ष कहलाती है।

२३ मदनाकृति के आधार वे कहलाते हैं जो निर्दिष्ट भुजाके समन्तात् उस आयत के घूमने से दोनो ओर दो वृत्त बनते हैं।

२४ सजातीय शंकु वा सजातीय मदनाकृति वे होते हैं जिनके अक्षों और आधारों के व्यासों मे एकहि सम्बन्ध हो।

(अ) समानान्तर षट्तल उस पिण्ड को कहते हैं। जो छे चतुर्भुज तलों से बनाया जाय और उनमे के सन्मुख के दो२ तल समानान्तर हों। कि समानान्तर षट्तल एक एसा समास्यतल है, जिसके आधार समानान्तर चतुर्भुज हैं। जब समानान्तर षट्तल के आधार और शेषतल आयत क्षेत्र हों तो उसे समकोण समानान्तर षट्तल कहेंगे अन्यथा विषमकोण।

(क) बहुतल उस पिण्ड को कहते हैं जो कई तलीय क्षेत्रों से बनाया जाता है। जब वे सब तलीय क्षेत्र समान, और समास्त्रभुज हों तो उसे, समास्त्रसम बहुतल, कहेंगे।

२५ घनीयक्षेत्र, वा घन उस पिण्ड को कहते हैं जो

छे तलों से बने और उसके सन्मुख के तल समा-
नान्तर, और वर्ग हों।

२६ फलक उस पिण्ड को कहते हैं जो चार समान सम-
त्रिबाहुक त्रिभुजों से बनता है।

२७ समत्र्यस्राष्टतल उस पिण्ड को कहते हैं जो आठ
समान, समत्रिबाहुक त्रिभुजों से बनता है।

२८ समेषस्रभुजेन तल उस पिंड को कहते हैं जो बा-
रां समान, तुल्यकोण, समपञ्चबाहुक पंचभुजों
से बनता है।

२९ समत्र्यस्र नखतल उस पिण्ड को कहते हैं जो
बीस समान, समत्रिबाहुकों से बनता है।

(ग) जो पहिली दूसरी, दूसरी तीसरी, और तीसरी चौ-
थी आदि राशियों मे यथाक्रम एकदि सम्बन्ध हो-
ने से अनुपात बनता है उसे अवारित वा आ-
वर्त्य अनुपात कहते हैं।

यथा अ ÷ उ = उ ÷ क = क ÷ च इत्यादि इस अनुपात मे स्थित
हुई अ, उ, क, और च राशियों की पहिली दूसरी, दूसरी तीसरी,
तीसरी चौथी मे एकदि सम्बन्ध है इसलिये इसे अवारित वा अव-
र्त्य अनुपात कहेंगे।

(घ) अवारित अनुपात की चार राशियों मे से पहिली

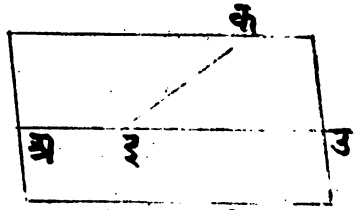
और चौथी राशी मे जो सम्बन्ध होता है उसे पहिली और दूसरी राशिका त्रिकली कृत सम्बन्ध कहते हैं।

यथा अ÷उ=उ÷क=क÷च इहां अ,च मे जो सम्बन्ध है उसे अ,उ का त्रिकली कृत सम्बन्ध कहते हैं।

## १ साध्य

**किसी सरल रेखा का एक भाग एकतल मे और दूसरा उस तलके वहिर्गत नहि होसकता।**

कल्पना करो कि अइक सरल रेखा है तो उसका अइ भाग एकतल मे और इक उसतल के वहिर्गत कबी नहि होसकता।



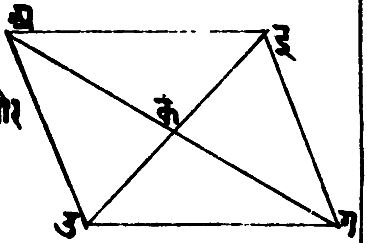

उपपत्ति। जब कहो कि अइक रेखा का अइ भाग एकतल मे और इक भाग दूसरे मे हो सकता है यथा पार्श्व चित्र मे तो यतः अइ रेखा जिस तल मे है वह उसी तल मे बढ़ सकती है। कल्पना करो कि अइ रेखा उसी तल मे उ तक बढ़ाई गई है तो अइक, अइउ ये दो सरल रेखा हुईं जिनका अइ भाग एकहि है और इक, इउ भाग अलग २ हैं (त· ज्या·१, ११ सा· अ· से) यह असंभव है अतः अइक सरल रेखा का इक भाग उसतल के वहिर्गत नहि है।

## २ साध्य

**आपस मे संपात करने वाली दो रेखा किसी एकहि तल मे होती हैं और तीनों विन्दुओं मे एक दूसरी से संपात करने वाली तीन रेखा भी किसी एकहि तल मे होती हैं।**

कल्पना करो कि अग, उइ रेखा क मे संपात करती हैं तो अग, उइ

एक तल मे होंगी, और अग, उइ, गउ रेखा एक दूसरी से क, ग और उ बिन्दुओं मे संपात करती हैं तो अग, उइ, और गउ तीनों रेखा एक तल मे होंगी।

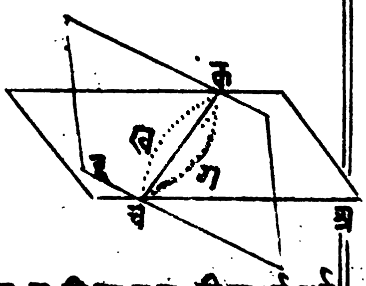



उपपत्ति। कल्पना करो कि कोई एक तल अग रेखा से मिला हुआ है, और वह तल उस अग रेखा के समन्तात् तबतक घुमाया गया है कि जबतक उ बिन्दु मे मिले। यतः उ और क बिन्दु उसी तल मे हैं अतः (त॰ ज्या॰ १, ७ प॰ और द्वि॰ ज्या॰ १, १ सा॰ से) उइ रेखा भी उसी तल मे है। परन्तु अग रेखा भी उसी हि तल मे है इस हेतु अग और उइ एकहि तल मे हैं। फिर यतः अग रेखागत क बिन्दु के सहित उ और ग बिन्दु भी उसी हि तल मे हैं अतः (त॰ ज्या॰ १, ७ प॰ से) उग रेखा भी उसी तल मे है। परन्तु पीछे उपपन्न हुआ है कि अग और उइ भी उसी हि तल मे हैं; इस कारण अग, उइ, और उग ये तीनो रेखा एकहि तल मे हैं।

## ३ साध्य

**दो तल जो एक दूसरे को कांटे उनका मिश्रच्छेद एक सरल रेखा होगी।**

कल्पना करो कि अक और कइ तल एक दूसरे को काटते हैं तो उनके मिश्रच्छेद की कच रेखा सरल रेखा होगी।

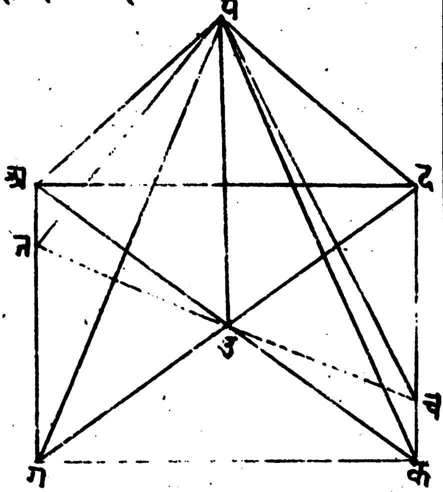



उपपत्ति। जब कहे कि यह सरल रेखा नहि तो अक तल गत क बिन्दु से च बिन्दु तक (त॰ ज्या॰ १, ७ अवा॰ से) रेखा मिलाने से उस तल मे कोइ और कखच सरल रेखा होगी और ऐसे हि कइ तल गत उसी क बिन्दु से उस च बिन्दु तक मिलाई गई

क ग च सरल रेखा होगी तो क ख च, क ग च दो सरल रेखाओं से क्षेत्र बनने लगा परन्तु (त॰ ज्या॰ १, १० स॰ से) यह असम्भव है अतः उन दोनों तलों का मिथ छेद हि सरल रेखा है।

## ४ साध्य

**जब किसी दो रेखाओं के संपात विन्दु पर खड़ी की गई रेखा उन दोनों रेखाओं पर लम्ब हो तो जिस तल मे वे रेखा हैं उस तल पर भी वह लम्ब होगी।**




कल्पना करो कि अक, गद रेखाओं के उ संपात विन्दु पर खड़ी की गई उप रेखा उन दोनों रेखाओं पर लम्ब है तो जिस अगकद तल मे वे रेखा हैं उस अगकद तल पर भी वह लम्ब होगी।

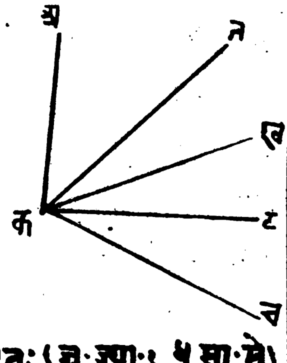
उपपत्ति। उअ, उग, उक और उद परस्पर समान काट लो और अग, गक, कद, दअ, उप, अप, गप, कप, और दप रेखा कर दो और अग रेखा के किसी त विन्दु से निर्गत तउ रेखा कद रेखा के च विन्दु तक बढ़ा दो और तप, चप रेखा मिला दो। पउग, पउक, पउद और पउअ त्रिभुजों मे यतः उप भुज सर्व्वनिष्ठ और अउ = कउ = दउ = गउ और उ पर के कोण समकोण हैं अतः (त॰ ज्या॰ १, ४ सा॰ से) पग = पक = पद = पअ हुआ। और ▽ अउग, ▽ कउद मे (त॰ ज्या॰ १, १५ सा॰ से) ∠ अउग = ∠ कउद और अउ = उक, गउ = उद (काटी हुई) हैं तो (त॰ ज्या॰ १, ४ सा॰ से) अग = कद, ∠ उअग = ∠ उकद; ▽ अउत, ▽ कउच मे ∠ उअत = ∠ उकच, (त॰ ज्या॰ १, १५ सा॰ से) ∠ अउत = ∠ कउच और अउ = कउ है अतः (त॰ ज्या॰ १, २६ सा॰ से) तउ = चउ, अत = कच। अब

△ अपग, △ कपद मे अप = कप, गप = दप और अग = कद तो (न·ज्या· १,८ सा·से) ∠ पअत = ∠ पकच हुआ; और पकच, पअत त्रिभुजो मे पअ = पक, अत = कच और, ∠ पअत = ∠ पकच (सिद्ध होचुका) है इसलिये (न·ज्या·१,४ सा·से) पत = पच हुआ और पउत, पउच त्रिभुजो मे उप उभयनिष्ठ, उत = उच और चप = तप (सिद्ध होगया) है इस हेतु (न·ज्या·१,८ सा·से) ∠ पउत = ∠ पउच हुआ अर्थात् ∠ पउत, ∠ पउच समकोण, और उप रेखा तच रेखा पर लम्ब हुई ऐसे हि उस तल गत हरएक रेखा पर उप लम्ब होगी अतः (न·ज्या· १, ४ प·से) उप रेखा अक, गद रेखा गत तल पर लम्ब हुई।

## ५ साध्य

**किसी एक हि विन्दु मे संपात करने वाली तीन रेखाओं के उस संपात विन्दु पर खडी की गई रेखा जब उन तीनो रेखोंओं पर लम्ब हो तो वे तीन रेखा किसी एक हि तल मे होगी।**

कल्पना करो कि कत, कट, कच तीनो रेखाओं के क संपात विन्दु पर खडी की गई कअ रेखा उन तीनों रेखाओं पर लम्ब है तो कत, कट, और कच तीनों रेखा किसी एक हि तल मे होगी।




उपपत्ति। जब कहें कि वे एक तल मे नहि हैं तो कल्पना करो कि कच, कट रेखाओं पर जाने वाले तल और कअ, कत रेखाओं पर जाने वाले तल का मिथच्छेद (न·ज्या·१, ३ सा·से) कख रेखा है।

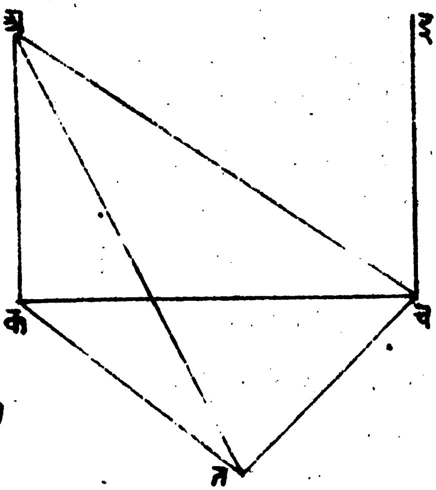
यतः कअ रेखा कच, और कट पर लम्ब है अतः (न·ज्या·१,४ सा·से) कअ रेखा कट, और कच गत तल पर भी लम्ब होगी परन्तु कख रेखा

भी उसी तल मे कल्पना की है अतः (घ·ज्या·१, ३ प·से) कअ रेखा कख रेखा से भी ∠ अकख समकोण बनती है और ∠ अकत भी समकोण है इसलिये ∠ अकख = ∠ अकत हुआ परन्तु अकत, अकख दोनो कोण एकहि तल मे है अतः (त·ज्या·१, ९ स·से) असम्भव है। अतएव कत रेखा कच, कख गत तल से बाहर नहि अर्थात् कच, कट, और. कत ये तीनों रेखा एकहि तल मे हुई।

## ६ साध्य

**जब किसी एकहि तल पर दो सरल रेखा लम्ब हों तो वे दो रेखा एक दूसरे के समानान्तर होंगी।**

कल्पना करो कि कअ और चइ रेखा कचत तल पर लम्ब हैं तो कअ, और चइ समानान्तर होंगी।



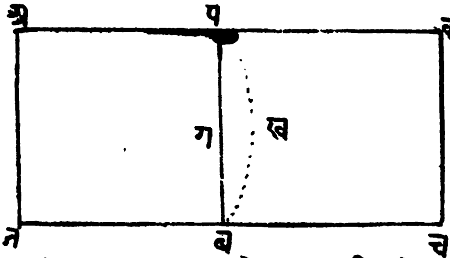

उपपत्ति। कल्पना करो कि उक्त तल मे कच रेखा मिली है और उसी तल मे कच रेखा पर चत लम्ब रेखा कअ के समान की है तो तक, तअ और चअ रेखा खेंची हैं। यतः कचत, चकअ त्रिभुजों मे कअ = चत, और कच भुज उभयनिष्ठ है, और कचत, चकअ समकोण हैं अतः (त·ज्या·१, ४ सा·से) कत = चअ है। यतः अकत, तचअ त्रिभुजों मे कत = चअ, कअ = चत, और तअ उभयनिष्ठ है अतः (त·ज्या·१, ८ सा·से) ∠ अकत = ∠ अचत है। परन्तु (घ·ज्या·१, ३ प·से) अकच कोण, इचक कोण, इचत कोण, अकत कोण समकोण हैं इसलिये अचत

कोण भी समकोण हुआ अर्थात् इच, अच, और कच तीनो रेखाओं के च संपात बिन्दु पर खड़ी हुई चत रेखा उन तीनो रेखाओं पर लम्ब हुई इसहेतु (ख·ज्या·११,५सा·से) वे तीनो रेखा एकहि तल मे हुई और चक, चअ रेखा जिस तल मे हैं (ग्र·ज्या·११,२सा·से) कअ रेखा भी उसी तल मे है इसकारण अच, कअ, कच, और चइ रेखा एकहि तल मे हुई यतः अकच, इचक समकोण वा इनका योग दो समकोण के समान है अतः (त·ज्या·१,२८सा·से) कअ और चइ समानान्तर हैं।

## ७ साध्य

**दो समानान्तर रेखा मे की एक रेखागत किसी बिन्दु से दूसरी रेखा गत किसी बिन्दु तक जो रेखा खेंची जाती है वह उसी तल मे होती है जिस मे वे समानान्तर दो रेखा हैं।**

कल्पना करो कि अक और तच समानान्तर रेखा हैं और अक रेखा के किसी प बिन्दु से तच रेखा के किसी ब बिन्दु तक रेखा मिलाई गई है तो वह पब रेखा उसी तल मे होगी जिस मे वे दो समानान्तर रेखा हैं।




उपपत्ति। जब कहें कि पब रेखा उस तल मे नहि जिस मे वे दो समानान्तर रेखा हैं तब कल्पना करो कि वह उस तल से बहिर्गत है यथा पखब रेखा है तो उन समानान्तर रेखाओं पर जाने वाले उस तल गत उस प बिन्दु से उस ब बिन्दु तक पगब रेखा खेंचो। यतः पगब और पखब दो सरल रेखाओं से क्षेत्र बन-

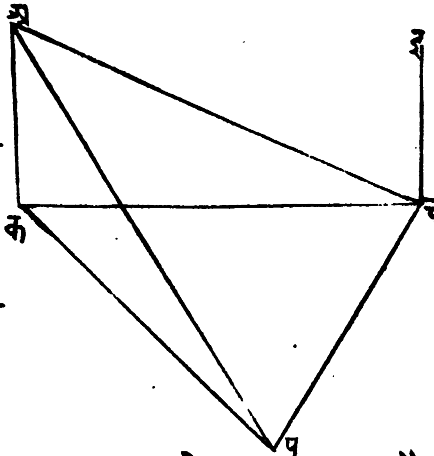
ने लगा है परन्तु (त·ज्या·१, १०स·से) यह असम्भव है। इसहेतु पब रेखा उस तल से वहिर्गत नहि होगी अर्थात् उसी तल मे होगी जिस मे वे दो समानान्तर रेखा हैं।

## ८ साध्य

**दो समानान्तर रेखाओं मे की एक रेखा जब किसी तल पर लम्ब हो तो दूसरी भी उसी तल पर लम्ब होगी।**

कल्पना करो कि अक, इच दो समानान्तर रेखा हैं और अक रेखा किसी कचप तल पर लम्ब है तो इच रेखा भी उसी कचप तल पर लम्ब होगी।

उपपत्ति। कल्पना करो कि कच रेखा मिलाई गई है, उसी तल मे कच पर चप लम्ब रेखा (त·ज्या·१, ११ सा·से) की है, और (त·ज्या·१, ३ सा·से) कअ = चप काटी है; और पक, चअ, और पअ रेखा मिलाई गई हैं। अकच, पचक त्रिभुजो मे अक = चप (किया) है, कच उभयनिष्ठ है और अक रेखा कचप तल पर लम्ब है इसलिये (त·ज्या·१, ३प·से) अकच, अकप समकोण हैं और



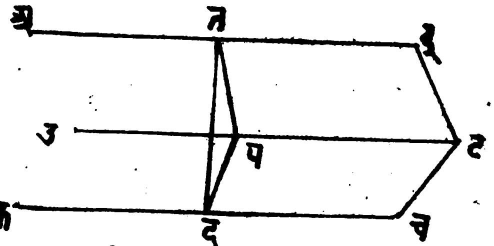

कचप भी समकोण है अतः (त·ज्या·१, ४ सा·से) कप = अच है। ∴ अकप, पचअ त्रिभुजों मे अक = चप, कप = चअ और अप उभयनिष्ठ है ∴ (त·ज्या·१, ८ सा·से) ∠ अकप = ∠ अचप है; परन्तु ∠ अकप समकोण है इसलिये ∠ अचप भी समकोण है। यतः अच, कच रेखाओं के चसंपात विन्दु पर खड़ी हुई पच रेखा उन दोनो रेखा-

ओं पर लम्ब है अतः (च॰ ज्या॰ १, ४ सा॰ से) चप रेखा उस तल पर लम्ब है जिसमे वे रेखा हैं। यतः जिस तल मे अक, इच समानान्तर रेखा हैं (च॰ ज्या॰ १, ७ सा॰ से) उसी तल मे अच, कच रेखा हैं अतः (च॰ ज्या॰ १, ३ प॰ से) ∠पचइ समकोण है, और (न॰ ज्या॰ १, २९ सा॰ से) ∠अकच + इचक = दो समकोण है परन्तु ∠अकच समकोण है इसहेतु ∠इचक समकोण है। अब यतः कच, पच रेखाओं के च संपात विन्दु पर खड़ी हुई चइ रेखा उन दोनो रेखाओं पर लम्ब है अतः (च॰ ज्या॰ १, ४ सा॰ से) कचप तल पर चइ रेखा लम्ब है।

## ९ साध्य

**दो सरल रेखाओं मे की प्रत्येक, किसी अन्य तल मे खिंची गई रेखा के समानान्तर हो तो वे दो रेखा भी आपस मे समानान्तर होंगी।**

कल्पना करो कि अइ, कच मे की प्रत्येक रेखा किसी अन्य तल मे स्थित हुई उट रेखा के समानान्तर हैं तो अइ, कच एक दूसरे के समानान्तर होंगी।



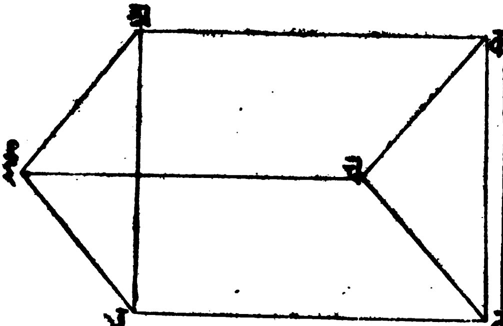

उपपत्ति। कल्पना करो कि उट और कच रेखाओं से मिले हुए तल मे उट रेखा के प विन्दु से उस पर पद लम्ब किया है जो कच रेखा मे द पर मिलता है; और उट और अइ रेखाओं से मिले हुए तल मे उसी प विन्दु से उस उट रेखा पर पत लम्ब किया है, और तद रेखा मिलाई है। यतः पत, पद रेखाओं के प संपात विन्दु मे खड़ी हुई उट रेखा उन पर लम्ब है अतः (च॰ ज्या॰ १, ४ सा॰ से) उट रेखा पतद तल पर लम्ब है यतः उट, अइ समानान्तर रेखाओं मे की उट रेखा पतद तल पर

लम्ब हैं अतः (त्र॰ज्या॰१, ८ सा॰से) अइ रेखा भी पतद् तल पर लम्ब है ऐसेहि कच रेखा भी उस पदत तल पर लम्ब है इसलिये (घ॰ज्या॰१, ६ सा॰से) अद, कच रेखा एक दूसरे के समानान्तर हैं।

## १० साध्य

**किसी तल मे स्थित हूई परस्पर मिलने वाली दो सरल रेखा जब किसी और तल मे स्थित हूई परस्पर मिलने वाली दो रेखाओं के समानान्तर हों तब पहिली दो रेखाओं के संयोग से बनाहूआ कोण दूसरी दो रेखाओं के संयोग से बने हूए कोण के तुल्य होगा।**

कल्पना करो कि ई विन्दु पर मिलने वाली अई, उई रेखा किसी और तल मे स्थित हूई च विन्दु पर मिलने वाली कच, टच रेखाओं के समानान्तर हैं तो ∠ अईउ = ∠ कचट होगा।



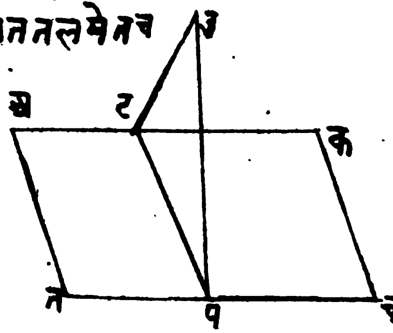

उपपत्ति। अई, उई, कच और टच एक दूसरे के तुल्य करलो, और अक, ईच, उट रेखा मिलालो। यतः ईउ और चट रेखा परस्पर समान और समानान्तर हैं अतः (त॰ज्या॰१, ३३ सा॰से) ईच, उट रेखा भी एक दूसरे के समान और समानान्तर हैं ऐसेहि ईच, अक भी एक दूसरे के समान और समानान्तर हैं इसलिये (त्र॰ज्या॰१, ९ सा॰से) अक, उट एक दूसरे के समान और समानान्तर हैं इसी हेतु (त॰ज्या॰१, ३३ सा॰से) अउ, कट रेखा समान और समानान्तर हूई अब अईउ, कचट त्रिभुजो मे अई = कच, ईउ = चट

और अउ=कट है इसलिये (त·ज्या·१, ८ सा·से) ∠अईउ=∠क-चट हुआ।

## ११ साध्य

### किसी तल से बहिर्गत किसी एक विन्दु से उस तल पर लम्ब डालने की रीति।

कल्पना करो कि अच तल से बहिर्गत किसी उनिर्दिष्ट विन्दु से उस अच तल पर लम्ब डालना है तो उस तल से मिली हुई किसी तच रेखा और उ विन्दुगत तल मे तच पर उस उ विन्दु से (त·ज्या·१,१२ सा·से) उप लम्ब करने से जो यदि उप रेखा उस अच तल पर भी लम्ब हो तौ वह उत्पन्न हुआ, जब वह उप उस तल




पर लम्ब न हो तब उस तच रेखा के उसी प विन्दु से उस पर उसी अच तल मे खेंची गई पट लम्ब रेखा पर उस उ विन्दु से उट लम्ब डाले तौ यहि उट उस अच तल पर लम्ब होगा।

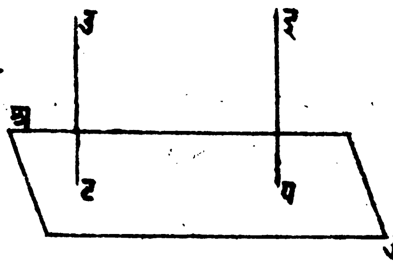
उपपत्ति। (त·ज्या·१,३१ सा·से) ट विन्दु गत अक रेखा तच रेखा के समानान्तर खेंचो। यतः तच रेखा के प विन्दु से उस पर पउ, पट रेखा लम्ब हैं अतः टप, उप रेखाओं के प संपात विन्दु मे खडी हुई तप रेखा उन पट, पउ रेखाओं पर लम्ब है इसलिये (च·ज्या·१,४ सा·से) तप रेखा पटउ तल पर लम्ब है। यतः तप, अक समानान्तर रेखाओं मे की एक तप रेखा पटउ तल पर लम्ब है अतः (च·ज्या·१,८ सा·से) अक रेखा उस पटउ तल पर लम्ब है। इस हेतु (च·ज्या·१,३ प·से) ∠कटउ सम कोण है, और ∠उटप भी समकोण है। यतः टप, टक रेखाओं के ट सम्पात

विन्दु पर खड़ी हुई ट उ रेखा उ न ट प, ट क रेखाओं पर लम्ब है अत (व्र·ज्या·८, ४ सा·से) ट उ रेखा ट क प तल पर लम्ब अर्थात् अव तल पर उ विन्दु से उ ट लम्ब है।

## ११ साध्य

**किसी तल के वीच के किसी निर्दिष्ट विन्दु से उस तल पर लम्ब खेंचने की रीति।**

कल्पना करो कि किसी अक तल मे स्थित हुए किसी ट निर्दिष्ट विन्दु से उस अक तल पर लम्ब खेंचना है तो उस तल के वाहिर के किसी इ विन्दु से (व्र·ज्या·८, ११ सा·से) उस अक तल पर इप लम्ब करके इप रेखा के समानान्तर उस ट विन्दु से ट उ रेखा खेंची जाने से वह ट उ रेखा उस अक तल पर उसी ट विन्दु से लम्ब खेंची जायगी।

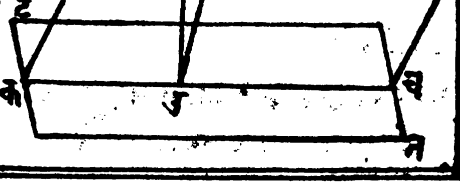



उपपत्ति। यतः ट उ, प इ समानान्तर रेखाओं मे की एक प इ रेखा अक तल पर लम्ब है अतः (व्र·ज्या·८, ८ सा·से) अक तल के निर्दिष्ट ट विन्दु से खेंची गई ट उ रेखा उस अक तल पर लम्ब है।

## १२ साध्य

**किसी तल गत एकहि विन्दु से उसके एकहि ओर उस पर एक से अधिक लम्ब रेखा नहि होसकती, और किसी तल से वहिर्गत विन्दु से उस तल पर एकहि लम्ब होसकता है।**

कल्पना करो कि ट न निर्दिष्ट तल और उस मे उ निर्दिष्ट विन्दु है तो उस उ विन्दु से

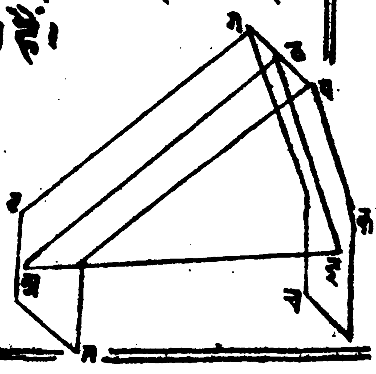


उस निर्दिष्ट तल के एकहि ओर एकसे अधिक लम्ब रेखा नहि होगी।

उपपत्ति। अब कहें कि एक से अधिक लम्ब रेखा होसकती हैं। यथा उअ, उई उस एकहि उ विन्दु से टत तल के एकहि ओर लम्ब रेखा हैं। तब कल्पना करो कि उअ, उई रेखाओं से मिला हुआ कप तल है, और टत, कप तलों का मिश्र छेद कच सरल रेखा है। यतः उअ और उई सरल रेखा टत तल पर लम्ब हैं, और कच रेखा टत तल से मिली हुई है अतः (घ·ज्या·१, ३ प·से) एकहि कप तल मे स्थित हुए अउच और इउच समकोण हैं। अर्थात् अउच कोण अपने खण्ड इउच कोण के समान होता है परन्तु (न·ज्या·१, ९ स·से) यह असम्भव है इसलिये किसी तल मे स्थित हुए किसी एकहि विन्दु से उस तल के एकहि ओर एक से अधिक लम्ब रेखा नहि होंगी। ऐसेहि किसी तल से वहिर्गत विन्दु से उस पर एकहि लम्ब होसकता है। क्योंकि जब दो लम्ब एक तल पर हों तो (घ·ज्या·१, ६ सा·से) वे समानान्तर हैं, जो उस एकहि विन्दु से खेंचे गये हैं। यह अति असम्भव है कि दो समानान्तर रेखा एक विन्दु पर मिले इसहेतु एक तल से वहिर्गत किसी एकहि विन्दु से उस पर एकहि लम्ब होगा।

## १४ साध्य

## एकहि सरल रेखा जिन तलों पर लम्ब है वे तल एक दूसरे के समानान्तर होते हैं।




कल्पना करो कि अइ सरल रेखा कच, टत तलो मे के प्रत्येक पर लम्ब है तो कच और टत तल एक दूसरे के समानान्तर होंगे।

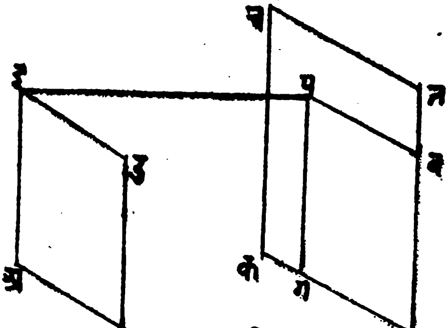
उपपत्ति। अब कहें कि वे तल परस्पर

समानान्तर नहिं हैं तो वे बढ़ाने से मिलजावेंगे। कल्पना करो कि वे बढ़ाने से मिलजाते हैं, और उनका मिश्र छेद गप सरल रेखा है। तो गप रेखा मे कहिं ठ बिन्दु लेकर ठअ और ठइ रेखा करदो। यतः अइ रेखा टत तल पर लम्ब है अतः (अ·ज्या·१, १प·से) ठअइ त्रिभुज का अन्तर्गत ∠ ठअइ समकोण है। ऐसे हि उसी त्रिभुज का अन्तर्गत ∠ ठइअ भी समकोण है अर्थात् ठअइ त्रिभु के अन्तर्गत ∠ ठअइ, ∠ ठइअ कोणों का योग दो समकोण हुआ परन्तु (त·ज्या·१, ९ सा·से) यह असम्भव है इसलिये मट और चक तल समानान्तर हि होंगे चारों ओर बढ़ाने से कभी नहि मिलेंगे

## १५ साध्य

**किसी एक तल मे स्थित हुई एक दूसरी से योग करती हुई दो सरल रेखा जब किसी दूसरे तल मे स्थित हुई एक दूसरी से योग करने वाली दो रेखाओं के समानान्तर हों तब वे दोनों तल परस्पर समानान्तर होंगे।**

कल्पना करो कि अउ तल मे मिली हुई इ बिन्दु मे योग करने वाली अइ और इउ सरल रेखा तक तल मे मिली हुई च बिन्दु मे योग करने वाली कच और चत रेखाओं के समानान्तर हैं तो अउ और कत तल समानान्तर होंगे।



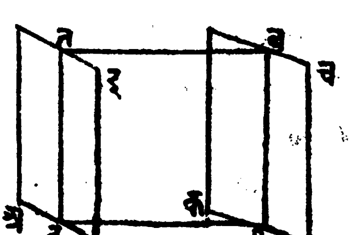

उपपत्ति। कल्पना करो कि अइ, उइ रेखाओं के इ योग बिन्दु से कत तल पर (अ·ज्या·१, १२ सा·से) इप लम्ब किया है, और प बिन्दु से उस कत तल मे चक के समानान्तर पग रेखा

उ और चत के समानान्तर पव रेखा खेंची हैं। इसलिये (च-ज्या-१,३प-से) ∠ इपग, ∠ इपव समकोण हैं। यतः कच के समानान्तर इअ, और पग हैं; और अइ, पग से मिले हुए तल से कच का तल अन्य है इसलिये (च-ज्या-१, ९ सा-से) अइ और पग समानान्तर हैं। यतः अइ और गप समानान्तर रेखाओं मे इप तीसरी रेखा मिलती है अतः (त-ज्या-१, २९ सा-से) ∠ अइप और ∠ इपग का योग दो समकोण है। परन्तु ∠ इपग समकोण है इसहेतु ∠ अइप भी समकोण है इसीप्रकार ∠ उइप भी समकोण है अर्थात् अइ और उइ रेखाओं के उसम्पात विन्दु मे खडी हुई इप रेखा उन दोनों रेखाओं पर लम्ब है। इसकारण (च-ज्या-१, ४ सा-से) इप रेखा अउ तल पर लम्ब है और यदि इप रेखा कत तल पर भी लम्बकी हुई है इसहेतु (च-ज्या-१, १४ सा-से) अउ और कत तल परस्पर समानान्तर हैं।

## १६ साध्य

**दो समानान्तर तल जो किसी तीसरे तलसे काटे जाय तो उन के मिश्र छेद की रेखा समानान्तर होंगी।**

कल्पना करो कि अइ और कच दो समानान्तर तल किसी तीसरे टब तल से काटे जाते हैं और तट, बप उन के मिश्र छेद की रेखा हैं। तो तट और बप परस्पर समानान्तर होंगी।



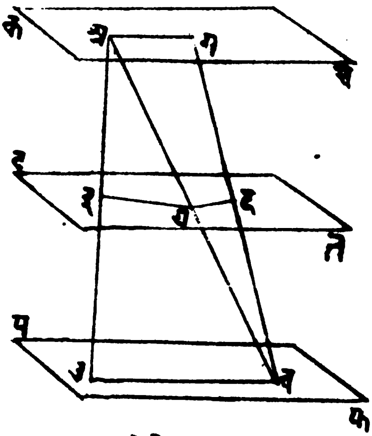

उपपत्ति। यतः तट, बप रेखा किसी एकहि टब तल मे उन अइ और कच तलों के सम्पात से बन

ती हैं तो तल सब और अनन्त दूर बढ़ाने से भी नहिं मिलते अतः तट, बप रेखा भी टब तल मे बढ़ाने से कबी न मिलेगी इस हेतु (त·ज्या·१, ३५ प·से) तट, बप रेखा समानान्तर हैं।

## १७ साध्य

**समानान्तर तलोंसे विभक्त की गई दो सरल रेखाओं के खण्डों मे एकहि सम्बन्ध होता है।**

कल्पना करो कि अउ, गब सरल रेखा कच, टत, पफ तलोंसे अ, इ, उ; और ग, द, ब विन्दुओं मे विभक्त हुईहैं तो अइ और इउ मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध गद और दब मे होगा।



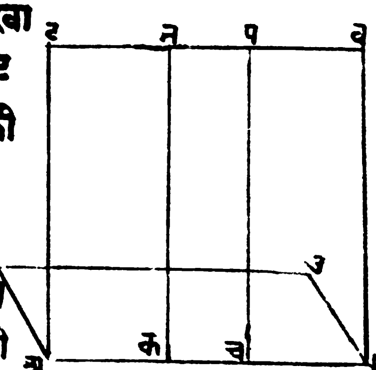

उपपत्ति। कल्पना करो कि अग, अब, उब रेखा मिलाने से अब रेखा टत तल मे य विन्दु पर सम्पात करती है तो यइ, यद रेखा मिलादो। यतः टत, पफ समानान्तर तल किसी तीसरे उबय-इ तल से सम्पात करते हैं अतः (त·ज्या·१, १६ सा·से) उन के मिश्र छेद की उब, इय रेखा समानान्तर हैं। ऐसेहि अग, यद रेखा भी समानान्तर हैं। अउब, अगब त्रिभुजों मे (त·ज्या·६, २सा·से) अय ÷ यब = अइ ÷ इउ; अय ÷ यब = गद ÷ दब (त·ज्या·६, ११ पं·से) अइ ÷ इउ = गद ÷ दब अर्थात् अउ रेखा के अइ, इउ खण्डों मे वहि सम्बन्ध हुआ जो गब रेखा के गद और दब खण्डो मे है।

## १८ साध्य

**किसी निर्दिष्ट तल पर खड़ी हुई लम्ब रेखा से मि-**

लारहने वाला हरएक तल उस निर्दिष्ट तल पर लम्ब होता है।

कल्पना करो कि अउ तल पर कत लम्ब रेखा है तो कत से मिला रहने वाला हरएक तल उस अउ तल पर लम्ब होगा।



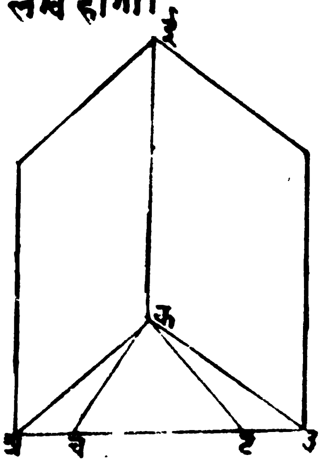

उपपत्ति। कल्पना करोकि कत रेखा से मिले रहने वाले किसी अईवट तल और उस अउ निर्दिष्ट तल की मिश्रछेद रेखा अई है इसलिये (घ॰ज्या॰१, ३ प॰से) ∠ तकई समकोण है अर्थात् अई रेखा पर कत लम्ब रेखा है। फेर अई रेखा के किसी च विन्दु से उस पर चप लम्ब रेखा अइवट तल मे खेंचो। यतः ∠ तकच, ∠ पचक मे का प्रत्येक समकोण वा इन का योग दो समकोणों के समान है अतः (त॰ज्या॰१, २८ सा॰से) कत, चप रेखा समानान्तर हैं। परन्तु कत, चप समानान्तर रेखाओं मे की कत रेखा अउ तल पर लम्ब है इसलिये (घ॰ज्या॰१, ८ सा॰से) चप रेखा अउ तल पर लम्ब है। यतः कत, चप रेखा उन दोनों तलों के मिश्रछेद अइ रेखा पर लम्ब हैं, अउ तल पर भी लम्ब है और ऐसेहि अइवट तल मे उस मिश्रछेद रेखा पर खेंची गई हरएक लम्ब रेखा अउ तल पर लम्ब होती है अतः (घ॰ज्या॰१, ४ प॰से) अउ तल पर अईवट तल लम्ब है। ऐसेहि अउ तल पर की लम्ब रेखा से मिला हुआ हरएक और तल भी अउ तल पर लम्ब होता है।

## १९ साध्य

जब एक दूसरे से सम्पात करने वाले दो तलो मे

का प्रत्येक तल किसी तीसरे तल पर लम्ब हो तब सूर्व्वोक्त तलोंकी मिश्रछेद रेखा भी शेषोक्त तल पर लम्ब होगी।

कल्पना करो कि एक दूसरे से सम्पात करनेवाले अई, ईउ तल अकउ तल पर लम्ब हैं और अई, ईउ तलोंकी ईक मिश्रछेद रेखा है। तो कई रेखा अकउ तल पर लम्ब होगी।




उपपत्ति। कल्पना करो कि अकउ तल मे कअ पर कट लम्ब और कउ पर कच लम्ब खेंचे हैं। यतः अकउ तल पर अई तल लम्ब है और इन के मिश्रछेद अक रेखा पर कट लम्ब अकउ तलमे (किया) है अतः (च॰ज्या॰१, ४ प॰से) कट रेखा अई तल पर लम्ब है। इसलिये (च॰ज्या॰१, ३ प॰से) कई रेखा पर कट रेखा लम्ब है। ऐसेहि कच रेखा कई रेखा पर लम्ब है अर्थात् कच, कट रेखाओं केक सम्पात विन्दु पर खड़ी हुई कई रेखा उन दोनों रेखाओं पर लम्ब है. इस हेतु (च॰ज्या॰१, ४ सा॰से) जिस तल मे चक, कट रेखा हैं उस तल पर कई रेखा लम्ब है अर्थात् अई, ईउ तलो की मिश्रछेद रेखा अकउ तल पर लम्ब है।

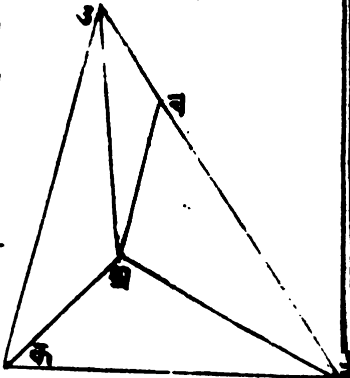
## २० साध्य

**जब कोई घिएजीय कोण तीन तलीय कोणों से बनाया जाय तो उन मे के हर दो कोणों का योग शेष तीसरे कोण से बड़ा होगा।**

कल्पना करो कि अ पर का घिलीय कोण ईअउ, उअक, कअई

इन तीन तलीय कोणो से बनाया गया है तो इन तीनो मे के हर दो कोणो का योग शेष तीसरे कोण से बड़ा होगा।

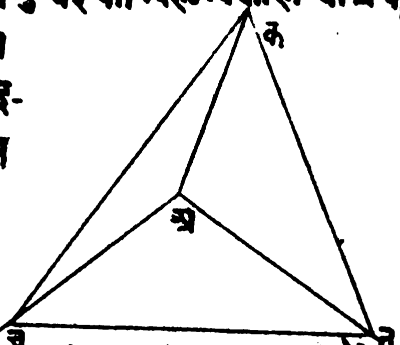
उपपत्ति। जब < कअई, < ईअउ, < उअक एक दूसरे के समान हों तब स्वयं हर दो कोणों का योग शेष तीसरे कोण से बड़ा है। जब ऐसे न हो अर्थात् कोई एक शेष कोणो मे के प्रत्येक से बड़ा हो तो कल्पना करो कि ईअउ कोण शेष कोणों मे के प्रत्येक कोण से बड़ा है। तो (त·ज्या·१, २३ सा·से) ईअक कोण के समान ईअच कोण ईउअ तल मे बना लो, और अक के समान अच कर लो फेर च बिन्दु से ईचउ एसी रेखा खैंचो जो अई और अउ रेखाओं से ई उ बिन्दुओं पर योग करे और कई, कउ रेखा कर लो। अब यतः ईअच, ईअक त्रिभुजों मे ईअ भुज उभयनिष्ठ और अक, अच समान की हैं, और तुल्य भुजों के बीच वाले < ईअक, < ईअच कोण भी समान किये हैं अतः (त·ज्या·१, ४ सा·से) ईक, ईच तुल्य हैं परन्तु ईकउ त्रिभुज मे (त·ज्या·१, २० सा·से) {ईक + कउ} > ईउ अर्थात् {ईक + कउ} > {ईच + चउ} इसलिये कउ > चउ फेर चअउ, कअउ त्रिभुजों मे अक भुज के समान अच भुज किया हुआ है और अउ भुज उभयनिष्ठ है चउ आधार से कउ आधार बड़ा है इसलिये (त·ज्या·१, २५ सा·से) चअउ कोण से कअउ कोण बड़ा है, (त·ज्या·१, ४ सा·से) {< उअक + < कअई} > {उअच + < चअई} अर्थात् ईअक, कअउ कोणों का योग ईअउ कोण से बड़ा हुआ।



## २१ साध्य

**किसी प्रकार के पिण्डीय कोण को बनाने वाले सब तलीय कोणों का योग चार समकोणों से छोटा होता है।**

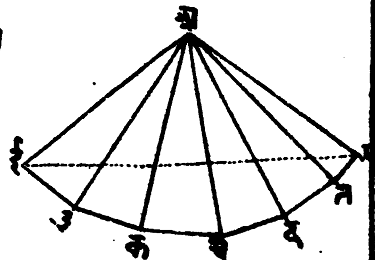
१ प्रकार। कल्पना करो कि अ बिन्दु पर का पिण्डीय कोण कअच, चअत, तअक इन तीन तलीय कोणों से बनाया गया है। तो इन तीनो कोणों का योग चार सम कोणों से छोटा होगा।




उपपत्ति। कल्पना करो कि अक, अच, और अत सरल रेखाओं के क, च, और त बिन्दुओं मे कच, चत, और तक रेखा मिलाई है। यतः च पर के पिण्डीय कोण के बनाने वाले तलीय कोणो मे के (त॰ज्या॰१, २० सा॰से) अचत, अचक कोणों का योग < कचत तीसरे कोण से बड़ा है ऐसे ही त पर के पिण्डीय कोण को बनाने वाले तलीय कोणों मे के अतच, अतक कोणो का योग चतक तीसरे कोण से बड़ा है और क पर के पिण्डीय कोण को बनाने वाले तलीय कोणो मे के अकच, अकत कोणो का योग चकत तीसरे कोण से बड़ा है अर्थात् तचक, चतक, तकच कोणों के योग से अचत, अचक, अतच, अतक, अकच, अकत कोणों का योग बड़ा है परन्तु प्रकार के चतक त्रिभुज के बीच वाले तचक, चकत, कतच कोणों का योग (त॰ज्या॰१, ३२ सा॰से) दो सम कोणों के समान है इसलिये उन अचत, अचक, अतच, अतक, अकच, और अकत कोणों का योग दो समकोण से अधिक है। यतः चअत, चअक, कअत त्रिभुजों के अचक, अकच, चअक, अतच, अचत, चअत, अतक, अकत, और कअत इन

नौ कोणों का योग छे समकोण के समान है और इनहि के बीचके अचक, अचत, अकच, अकत, अतक, और अतच छे कोणों का योग दो समकोण से अधिक है अतः चअत, तअक, और कअत शेष कोणों का योग चार समकोण से न्यून हैं।

२ प्रकार। कल्पना करो कि अ पर का घनकोण ईअउ, उअक, कअच, चअट, टअत, तअप, और पअई सात तलीय कोणों से बना है। तो उन सातों तलीय कोणों का योग चार समकोणों से छोटा होगा।




उपपत्ति। कल्पना करो कि उस घनकोण को बनाने वाले तल उस अ शिखर से कितने अन्तर पर किसी और एकहि तल से काटे गये हैं; और उनमे के प्रत्येक तल और शेषोक्त तल के मिश्र छेद ईउ, उक, कच, चट, टत, तप, और पई सरल रेखा हैं। यतः ई पर का घनकोण अईउ, अईप, उईप इन तीन तलीय कोणों से बनता है अतः (च॰ अ्या॰ १, २० सा॰ से) अईप, अईउ कोणें का योग उईप कोण से बड़ा है। ऐसे हि उ आदि घनकोणों पर के तलीय कोणो मे {∠ईउअ + अउक} > ईउक, {अकउ + अकच} > ∠उकच, {∠ अचक + ∠ अचट} > ∠कचट, {∠ अटच + ∠ अटत} > चटत, {∠ अतट + ∠ अतप} > ∠ टतप, और {∠ अपत + ∠ अपई} > ∠ तपई अर्थात् ∠ अईउ, ∠ अउई, अउक, ∠ अकउ, अकच, अचक, ∠ अचट, ∠ अटच, अटत, अतट, अतप, ∠ अपत, अपई, और अईप इन चौदह कोणो का योग ईउक, उकच, ∠ कचट, ∠ चटत, ∠ टतप, तपई, और पईउ

इन सात कोणो के योग से बड़ा है परन्तु ये सात कोण एक हि तल तग समभुज तलीय क्षेत्र मे के हैं। इसलिये (त॰ज्या॰१, ३२सा॰ से) इन सातो कोणो का योग दश सम कोणों के समान है इस हेतु उन चौदह कोणो का योग दश समकोण से अधिक हूआ यतः अपर के पिण्डीय कोण को बनाने वाले सातों तलीय त्रिभुजोमे के इक्कीस अंतः कोणों का योग (त॰ज्या॰१, ३२ सा॰ से) चौदह समकोण के समान है और अपर के पिण्डीय कोण को बनाने वाले सात तलीय कोणो को छोड़कर शेष चौदह कोणो का योग दश समकोण से अधिक है अतः अपर के पिण्डीय कोण को बनाने वाले सात तलीय कोणों का योग चार सम कोण से छोटा हूआ।

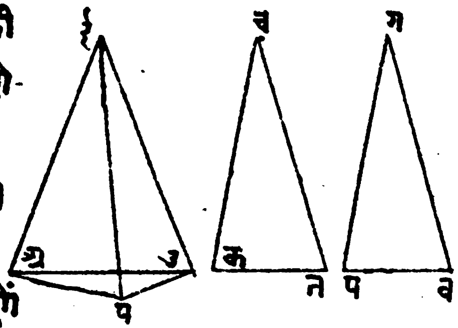
अनुमान। ऐसा समास्र सम बहुतल नहि होसकता कि जिस का पिण्डीय कोण पांच से अधिक तलीय कोणो से बनता हो। क्योंकि इसी साध्य से सिद्ध हूआ है कि बहुतल पिण्ड के हर एक पिण्डीय कोण को बनाने वाले सब तलीय कोणों का योग चार समकोणों से अल्प होता है, परन्तु समत्रिभुज के छे कोणों का योग, वर्गक्षेत्र के चार कोणों का योग, और सम षड स्रभुज के तीन कोणों का योग चार समकोणों के तुल्य होता है, सम पंचास्रभुज के चार कोणों का योग, और छे से अधिक समास्रभुज क्षेत्र के तीन कोणों का योग चार समकोणों से अधिक होता है। इस कारण समास्र सम बहुतल पिण्ड का पिण्डीय कोण सम पंचास्र भुज के तीन कोणों, वर्ग के तीन कोणो, और समत्रिभुज के पांच कोणो से अधिक तलीय कोणों से नहि बन सकता अर्थात् ऐसा समास्र सम बहुतल नहि हो सका कि जिसका पिण्डीय कोण पांच तलीय कोणों से अधिक

तलीय कोणों से बने।

## २२ साध्य

**जब किसी तीन तलीय कोणों मे के हर दो कोणों का योग तीसरे कोण से बड़ा हो और उन कोणों के बनाने-वाली सब भुजा आपस मे समान हों तब उन के आधारों की रेखाओं से त्रिभुज बन सकेगा।**

कल्पना करो कि अईउ, कचत, और पगव ये तीन तलीय कोण हैं जिन मे के हर दो कोणों का योग शेष तीसरे कोण से बड़ा होता है; और जिनकी अई, ईउ, कच, चत, पग, और गव भुजें एक दूसरे के समान हैं। अब जो अउ, कत, और पव रेखा की जांय तो उन अउ, कत, और पव रेखाओं से त्रिभुज क्षेत्र बन सकेगा, वा अउ, कत, और पत मे की हर दो रेखाओं का योग शेष तीसरी से बड़ा होगा।




उपपत्ति। जब अईउ, कचत, पगव कोण परस्पर समान हों तौ यतः इन कोणों के बनाने वाली भुजा भी परस्पर तुल्य हैं अतः (त·ज्या·१, ४ सा·से) अउ, कत, और पव आधार परस्पर समान होंगे। इसलिये उनमे के हर दो का योग तीसरे से बड़ा ही है। जब ऐसे न हो अर्थात् अईउ कोण शेष कोणों मे के प्रत्येक से बड़ा है और हर दो कोणों का योग शेष तीसरे से बड़ा है। तौ यतः उन कोणों के बनाने वाली सब भुजा एक दूसरे के समान हैं और उन कोणों मे का अईउ कोण शेष प्रत्येक से बड़ा है अतः (त·ज्या·१, २४ सा·से) अउ आधार शेष कत और पव मे के प्रत्येक आधार से बड़ा

है। इसलिये अउ बड़े आधार और शेष आधारों मे के प्रत्येक का योग तीसरे से अवश्य बड़ा होगा। कत और पब आधारोका योग भी अउ आधार से बड़ा है। क्योंकि जब अई रेखा मे (त·ज्या·१, २३सा·से) कचत कोण के तुल्य अईच कोण बनाकर (त·ज्या·१, ३सा·से) अईकेतुल्य,ईच बनालें, बअ और बउ रेखा मिलाई जांय तो यतः अईच और कचत त्रिभुजों मे अई, ईच मे की प्रत्येक भुजा कच, चत मेकी प्रत्येक भुजा के समान, और उनके बीच वाले अईच, कचत कोण समान (किये) हैं। अतः (त·ज्या·१,४सा·से) अच और कत समान हैं। फेर ∠ अईउ < {कचत + पगब} अर्थात् अईच और चईउ कोणों के योगसे कचत और पगब कोणों का योग बड़ा है इनमे से अईच, कचत समान कोण निकाल देनेसे (त·ज्या·१, ५स·से) शेष चईउ कोणसे पगब कोण बड़ा है। चईउ और पगब त्रिभुजोमे की पग, गब मे की प्रत्येक भुजा चई, ईउ मे की प्रत्येक भुजा के समान है, और पगब कोण चईग कोण से बड़ा(सिद्ध हुआ)है। इसलिये (त·ज्या·१,२४ सा·से) पब आधार चउ से बड़ा है। परन्तु अच और कत तुल्य (सिद्ध हुए)हैं। इसलिये पब और कत का योग अच और चउके योग से बड़ा परन्तु (त·ज्या·१, २०सा·से) अच और चउ का योग अउ से बड़ा है। इसकारण कत और पब का योग अउ से बड़ा हुआ अर्थात् अउ, कत, और पब मे की हर दो रेखाओं का योग शेष तीसरी से बड़ा हुआ। इसलिये (त·ज्या·१,२२ सा·से) ऐसा त्रिभुज क्षेत्र बन सकताहैकि जिसकी तीनो भुजा क्रमसे अउ, कत और पब इन तीनों के समान हैं।

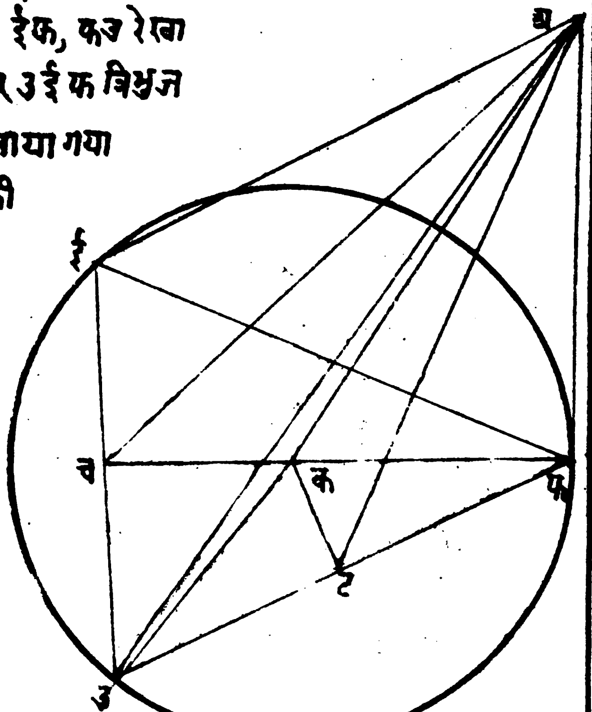
इहां तेईसवें साध्यकी उपपत्तिके लाघवार्थ और प्रमाण द्वारा निश्चय

करने के अर्थ श्री यह अग्रिम साधक रक्खा गया है।

## श्री साधक

जब कोई पिण्डीय कोण तीन तलीय कोणों से बनाया जाय, और उन हर दो तलों के मिश्रच्छेदों में शिखर से तुल्य दूरी पर कोई बिन्दु लिये जांय; और उन बिन्दुओं में मिलाई गई रेखाओं से बने हुए त्रिभुज पर वृत्त बनाया जाय तो शिखर से उन बिन्दुओं में के प्रत्येक बिन्दु तक का अन्तर उस वृत्त की त्रिज्या से बड़ा होगा।

कल्पना करो कि अ पर का पिण्डीय कोण उअई, ईअफ, और फअउ इन तीन तलीय कोणों से बनाया गया है; और इनके तलों के मिश्रच्छेदों में उ, ई, और फ बिन्दु अ शिखर से तुल्य दूरी पर लिये गये हैं, और उई, ईफ, फउ रेखा मिलाने से बने हुए उईफ त्रिभुज पर उईफ वृत्त बनाया गया है। तो उस वृत्त की उक वा फक त्रिज्या से अउ, अई और अफ में की प्रत्येक रेखा बड़ी होगी।




उपपत्ति। कल्पना करो कि उस वृत्त के क केन्द्र से बाहिर

ज़ाने वाली उईफ त्रिभुज की ईउ और उफ भुजों के च, और ट बिन्दुओं पर तुल्य दो विभाग हूए हैं और कच, कट, कअ, चअ, और टअ रेखा मिलाई गई हैं।

यतः उअफ, उकफ त्रिभुज (कृत प्रतिज्ञा, और त॰ज्या॰१, १५प॰ से) समद्विबाहुक हैं, और उन त्रिभुजो के क और अ शिखा बिन्दुओं से खेंची गई कट और अट रेखा उनके उभय निष्ठ आधार के तुल्य दो विभाग करती हैं। अतः (त॰ज्या॰१, ८ सा॰ और १०प॰ से) कटउ और अटउ समकोण हैं अर्थात् कट, अट रेखाओं के ट संपात बिन्दु पर खड़ी हूई टउ रेखा उन दोनो पर लम्ब है। इसलिये (घ॰ज्या॰१, ४ सा॰से) अटक तल पर टउ लम्ब रेखा हूई। फेर यतः अटक और चफउ तल की कट मिथच्छेद रेखा मे स्थित हूए हूए ट बिन्दु से उस पर चफउ तल मे खेंची गई टउ लम्ब रेखा अटक तल पर लम्ब है। अतः (घ॰ज्या॰१, ४ प॰ से) अटक तल पर चफउ तल वा चफउ तल पर अटक तल लम्ब है। ऐसेहि चफउ तल पर चअक तल लम्ब है अर्थात् अटक और अचक परस्पर सम्पात करने वाले तलो मे का प्रत्येक चकउ तल पर लम्ब है। इसलिये (घ॰ज्या॰१, १९ सा॰से) अक रेखा चफउ तल पर लम्ब है। इस हेतु (घ॰ज्या॰१, ३ प॰से) अकफ वा अकउ समकोण है। (त॰ज्या॰१, ३२ सा॰से) कअफ वा कअउ न्यून कोण है। इस कारण (त॰ज्या॰१, १९ सा॰से) अफक वा अकउ बड़े कोण के सन्मुख की अफ वा अउ भुजा कअफ वा कअउ छोटे कोण के सन्मुख वाली कफ वा कउ भुजा से बड़ी है अर्थात् उस अ शिखर से तुल्य दूरी पर के बिन्दुओं से बने हूए त्रिभुज पर समम्बिहत की त्रिज्या से अ शिखर से उन मे के प्रत्येक

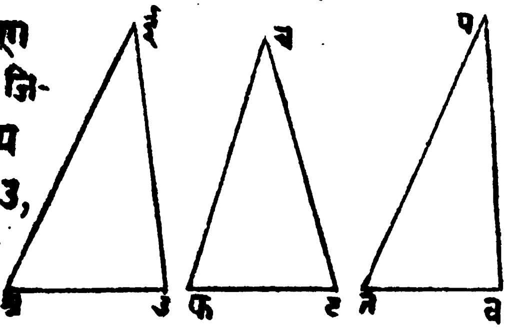
बिन्दु तक का अन्तर बड़ा हुआ।

अनुमान। जब किसी घिलीय कोण को बनाने वाले तीन तलीय कोणों की हर एक भुजा आपस मे तुल्य हो तो उनके प्रान्त बिन्दुओ मे मिलाई गई रेखाओं से बने हुए त्रिभुज पर जो वृत्त बनाया जाता है उसकी त्रिज्या से हर एक तलीय कोण की भुजा बड़ी होती है।

## २३ साध्य

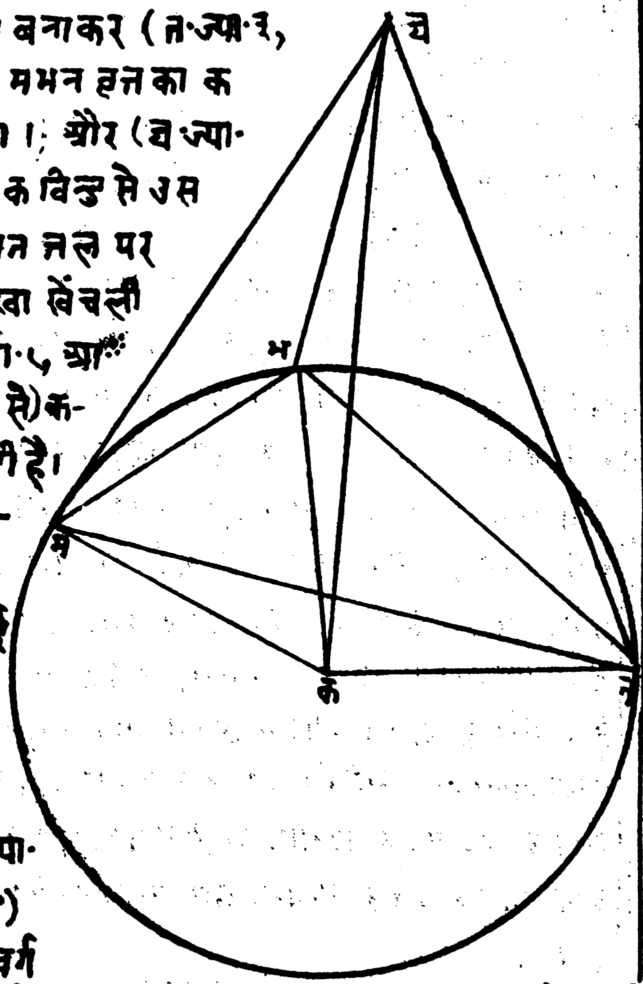
**जिन तीन तलीय कोणों मे के हर दो का योग शेष तीसरे से बड़ा, और, तीनो का योग चार सम कोणों से छोटा है, उन तीन तलीय कोणों से एक घिलीय कोण बनाया चाहते हैं।**

कल्पना करो कि अईउ, फचट, और तपब ये तीन निर्दिष्ट कोण हैं जिन मे के हर दो का योग शेष तीसरे से बड़ा, और तीनो का योग चार समकोण से छोटा है। तो इनसे ऐसा एक घिलीय कोण बनाया चाहते हैं कि जिस पर के तीनों तलीय कोण यथाक्रम अईउ, फचट, तपब तलीय कोणो के समान हों।




कर्त्तव्य। उन तीनों तलीय कोणों के बनाने वाली अई, ईउ, फच, चट, तप, और पब भुजा सब एक दूसरे के समान कर लो और अउ, फट, और तब मिलाई गई रेखाओं से यत: (घ॰ज्या॰१, २२ सा॰से) मभन एक ऐसा त्रिभुज बन सकता है कि जिस की मभ, भन, और मन भुजा यथाक्रम अउ, तब,

और फट भुजों के समान हो अर्थात् मभ = अउ, मन = तव, और मन = फट हो। अतः (त·ज्या·१, २२ सा·से) ममन उक्त त्रिभुज बना लो फेर (त·ज्या·४, ५ सा·से) ममन त्रिभुज के उपरिगत ममन वृत्त बनाकर (त·ज्या·३, १ सा·से) उस ममन वृत्त का क केन्द्र ढूंड लो। और (त·ज्या·१, १२ सा·से) क विन्दु से उस ममन वृत्तगत नल पर कच लम्ब रेखा खेंच लो यतः (त·ज्या·८, आसाधक के अ·से) कम से अई बड़ी है। अतः {(अई)−(कम)} के समान वा (अई + कम) और (अई − कम) के आयत के समान (त·ज्या·२, १४ सा·से) बनाए उप वर्ग की एक भुजा के समान कच कर लो तो चम, चभ, और चन रेखा मिलाने से च बिन्दु पर अभीष्ट पिण्डीय कोण बन जायगा कि जिस पर के तलीय कोण निर्दिष्ट तलीय कोणों के समान हैं।




उपपत्ति। यतः ममन तल पर कच लम्ब रेखा है। अतः (त·ज्या

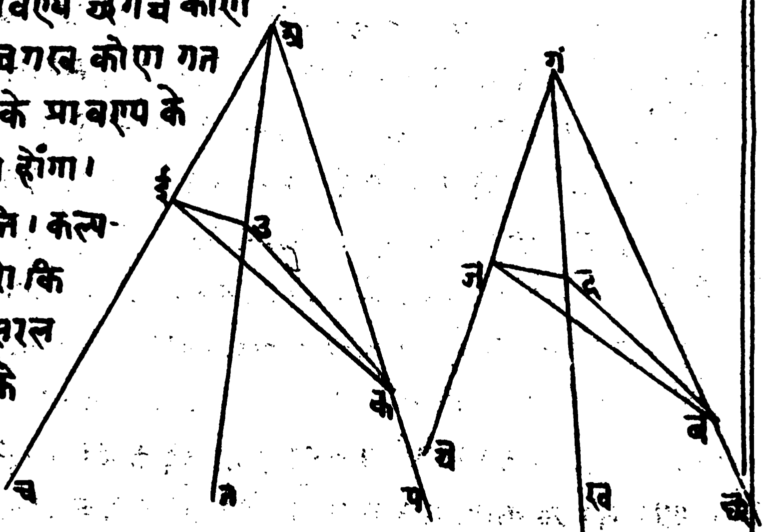
१, २५·से) < चकम, < बकन, और < चकभ समकोण हैं।
यतः चकम और बकन त्रिभुजों मे कम और कन तुल्य, चक
उभयनिष्ट है, और इनके बीच के चकम और बकन कोण तुल्य
हैं। अतः (न·ज्या·१, ४ सा·से) चम और बन तुल्य हैं। ऐसेहि च-
म और चभ भी तुल्य हैं अर्थात् चम, चन, और चभ ये तीनो तु-
ल्य हैं। यतः {(अई)² – (कम)²} के समान (चक)² बनाया हु-
आ है। अतः (अई)² = {(चक)² + (कम)²} है परन्तु (न·ज्या·१,
४७ सा·से) (चम)² = (कच)² + (कम)² है इसलिये (अई)²
= (चम)², और अई सरल रेखा चम सरल रेखा के समान हु-
ई। परन्तु ईउ, फच, चट, तप और पव मे की हरएक रेखा
अई के समान है; और चम और चन मे की प्रत्येक चम के स-
मान है। इसलिये अई, ईउ, फच, चट, तप, और पव मे की हर
एक रेखा; चम, चन, और चभ मे की हरएक रेखा के समान हुई
यतः अईउ, मचभ त्रिभुजों मे अई भुज मच भुज के तुल्य, ईउ
भुज चभ भुज के तुल्य, और अउ आधार मभ आधार के तुल्य
है। अतः (न·ज्या·१, ८ सा·से) अईउ, और मचभ कोण तुल्य
हैं। ऐसेहि फचट, और मचन कोण तुल्य; तपव, और नचभ
कोण तुल्य हैं। इसलिये वह च पर का घिएीय कोण उन मचभ,
मचन और नचभ अभीष्ट तलीय कोणों से बनाया गया सिद्ध
हुआ कि जो अईउ, फचट, और तपव निर्दिष्ट कोणों के समान
हैं।

## २ साध्य

**दो घिएीय कोणों मे का एक जिन तीन तलीय कोणों से बना हो यथाक्रम उनहि के समान तीन तलीय कोणों से जब दूसरा भी बनाया जाय तब उन घिएीय**

**कोणों पर मिले हुए तलों के वे मावण्य आपस में समान होंगे जो समान तलीय कोणों से मिले हुए तलों के संयोगों से बनते हैं।**

कल्पना करो कि अ और ग पर के दो पिण्डीय कोणों में से अ पर का एक पिण्डीय कोण चअत, तअप, और पअच तीन तलीय कोणों से बना, और ग पर का दूसरा पिण्डीय कोण छगख, खगठ, और ठगछ उन तीन तलीय कोणों से बनाया गया है जो यथाक्रम अ पर के तीन तलीय कोणों के तुल्य हैं अर्थात् चअत कोण छगख के तुल्य, तअप कोण खगठ के तुल्य, और पअच कोण ठगछ के समान है। तो अ पिण्डीय कोण पर के चअत कोण, और तअप कोण गत तलों का मावण्य, ग पिण्डीय कोण पर के छगख कोण और खगठ कोण गत तलों के मावण्य के समान होगा, तअप कोण और पअच कोण गत तलों का मावण्य खगठ कोण और ठगछ कोण गत तलों के मावण्य के समान होगा, तथा पअच कोण और चअत कोण गत तलों का मावण्य ठगछ कोण और छगख कोण गत तलों के मावण्य के समान होगा।




उपपत्ति। कल्पना करो कि अच सरल रेखा के किसी ई

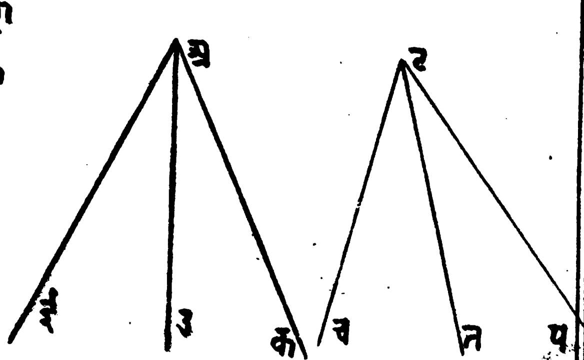
विन्दु से उस पर (त॰ ज्या॰ १, ११ सा॰ से) ई उ लम्ब चअत कोण गत त
ल मे किया जाने से अत रेखा के उ विन्दु मे मिलता है, और उसी
विन्दु से उसी रेखा पर चअप कोण गत तल मे किया गया लम्ब अप
रेखा के क विन्दु मे मिलता, और कउ रेखा मिली है।
फेर कल्पना करो कि (त॰ ज्या॰ १, ३ सा॰ से) अई के समान गज का
ट ली है, और ज विन्दु से गख रेखा पर चगख कोण गत तल मे
खिंचा गया जद लम्ब गख रेखा के द विन्दु पर मिलता है; और उसी
ज विन्दु से गछ रेखा पर चगछ कोण गत तल मे खिंचा गया जब
लम्ब गछ रेखा के ब विन्दु मे मिलता है; और बद रेखा मिली है।
यतः अईउ और गजद त्रिभुजो मे ईअउ और जगद कोण (प्र
तिज्ञा मे) तुल्य हैं, अईउ और गजद समकोण तथा
अई और गज भुज तुल्य (की) हैं। अतः (त॰ ज्या॰ १, २६ सा॰ से) ईउ
भुज जद के तुल्य और अउ भुज गद के तुल्य है। इसी प्रकार
से ईअक, जगब त्रिभुजों मे की ईक और जब तुल्य, अक और
गब तुल्य हैं। अब उअक, दगब त्रिभुजो मे उअ और दग भुज
तुल्य, कअ और बग भुज तुल्य (अ वी सिद्ध हुए) हैं; और इन
के वीच वाले उअक, दगब कोण (प्रतिज्ञा मे) समान हैं।
इसलिये (त॰ ज्या॰ १, ४ सा॰ से) उक, दब तुल्य हैं। फेर ई
उक, और जदब त्रिभुजों मे ईउ भुज जद के तुल्य, ईक भुज
जब के तुल्य, और उक आधार दब के तुल्य (सिद्ध हुआ) है। इ
सहेतु (त॰ ज्या॰ १, ८ सा॰ से) उईक कोण दजब कोण के तु
ल्य है अर्थात् चअत कोण और तअप कोण गत तलों के मि
च्छेद अच रेखा के किसी इ विन्दु से उस पर उन दोनो तलो
मे खेंची गई लम्ब रेखाओं से बना हुआ उईक कोण चगख को
ण और चगछ कोण गत तलों के मिश्रच्छेद गच रेखा के ज

विन्दु से उस पर उन दो तलोंमे खेची गई लम्ब रेखाओं से बने हुए दजव कोण के समान हुआ। परन्तु (रे॰ ज्या॰ १, ६प॰ से) उईक कोण, चअत और चअय कोण गत तलों का प्रावण्य है; और दजव कोण चगख और चगछ कोण गत तलोंका प्रावण्य है। ऐसेहि चअत और तअय कोण गत तलोंका प्रावण्य कगख और खगछ कोण गत तलों के प्रावण्य के समान; तथा सअच और पअत कोण गत तलोका प्रावण्य छगच और कगख कोण गत तलोके प्रावण्य के समान है।

## ३ साध्य

**जब दो त्रितलीय कोणों मे का एक जिन तीन तलीय कोणों से बनाया गया हो यथाक्रम उनहि के तुल्य तीन तलीय कोणों सेहि दूसरा भी बनाया हो तो वे दोनो त्रितलीय कोण एक दूसरे के समान होंगे।**

कल्पना करो कि ∠ईअउ = ∠चटत, ∠उअक = ∠तटप और ∠कअई = ∠पटच है; और अ पर का त्रितलीय कोण ईअउ, उअक और कअई तलीय कोणों से बनाया गया है; तथा ट पर का त्रितलीय कोण उन तलीय कोणों के समान चटत, तटप और पटच तलीय कोणो से बनाया गया है। तो अ पर का त्रितलीय कोण ट पर के



पिण्डीय कोण के समान होगा।
उपपत्ति। कल्पना करो कि अ पर का पिण्डीय कोण ट पर के पिण्डीय कोण पर ऐसे रक्खा गया है कि उसका अ बिन्दु ट बिन्दु मे, और अई रेखा टच रेखा मे, और ईअउ तल चटत तल मे मिला है। तो यतः ∠ईअउ, ∠चटत तुल्य हैं अतः अउ रेखा टत रेखा मे मिलेगी; और यतः ईअउ और उअक तलोंका झावर्ण्य (त्रि·ज्या·१, अ·सा·से) चटत और तटप तलोंके झावर्ण्य के समान है। अतः उअक तल तटप तल से मिल जायगा, और यतः ∠उअक, ∠तटप तुल्य हैं अतः अक रेखा टप रेखा से मिलेगी परन्तु अई रेखा टच रेखा मे मिली हुई है इसहेतु कअई तल पटच तल मे मिला है। अतएव (त·ज्या·१, स्व·से) अ पर का पिण्डीय कोण ट पर के पिण्डीय कोण के समान हुआ।

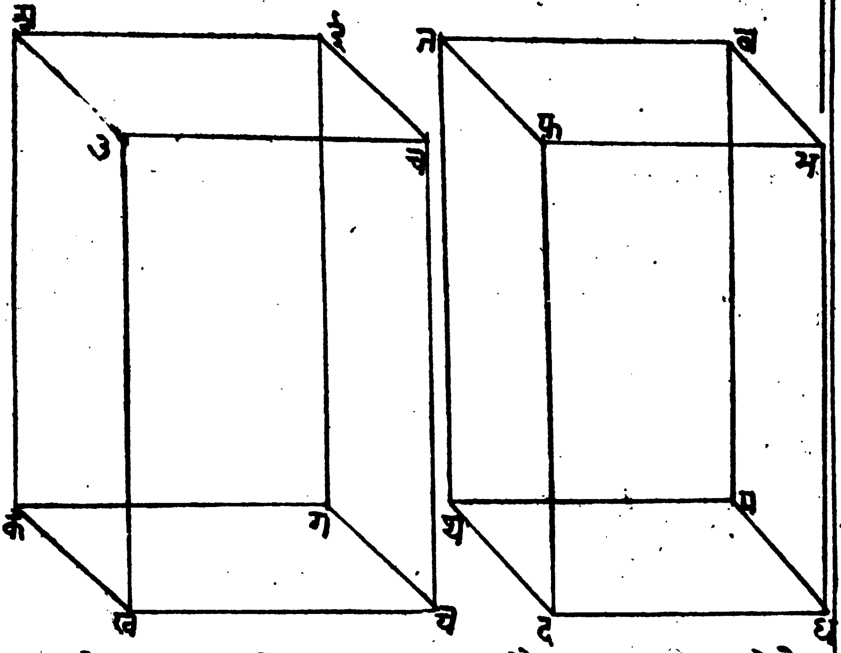
## ३ साध्य

**यथाक्रम समान, सजातीय, और तुल्य संख्याक तलीय क्षेत्रों से जो ऐसे पिण्ड बनाये जाते हैं कि जिनमे का प्रत्येक पिण्डीय कोण तीन से अधिक तलीय कोणोंसे नबना हो तो वे एक दूसरे के समान, और सजातीय होते हैं।**

कल्पना करो कि

खग तलीय क्षेत्र दप तलीय क्षेत्र का सजातीय और उसके तुल्य है; खच तलीय क्षेत्र दभ तलीय क्षेत्र का सजातीय और उसके समान है, चई क्षेत्र धब का सजातीय और उसके समान है; ईक क्षेत्र बथ क्षेत्र का सजातीय और उसके समान है, कउ क्षेत्र थफ क्षेत्र का सजातीय

ओर उसके समान है; तथा चञ क्षेत्र भत क्षेत्र का सजातीय ओर उसके समान है। तो उन खग, खच, चई, ईक, कउ, और चञ तलीय क्षेत्रों से संख्या, जाति, और महत्वमें इन के यथाक्रम स




मान बनेहुए दप, दभं, धब, बथ, थफ, और भत तलीय क्षेत्रो से यथाक्रम बनाये गये खई, और दब पिण्ड एक दूसरे के समान और सजातीय होंगे।

उपपत्ति। यतः ख पर का पिण्डीय कोण कखउ, कखच, और उखच तलीय कोणो से बनाया गया है और यथाक्रम इन के समान थदफ, थदध, और फदध तलीय कोणोंसे द पर का पिण्डीय कोण बनाया गया है। अतः (त्र·ज्या·, ३·सा·से) ख पर का पिण्डीय कोण द पर के पिण्डीय कोण के समान है। इसीप्रकार खई पिण्ड के एक द्वितीयादि पिण्डीय कोण यथाक्रम दब पिण्ड के एक द्वितीयादि पिण्डीय

कोणोके तुल्य हैं। फिर कल्पनाकरो कि खई पिण्ड दब पिण्ड पर ऐसे रखा गया है कि उसका ख बिन्दु द बिन्दुमे, खच रेखा दधमे और खग तल दप तल मे मिलता है। यतः खग तलीय क्षेत्र दप तलीय क्षेत्र का सजातीय और उसके समान है अतः खक रेखा दथ मे, कग रेखा थप मे, और गच रेखा पध मे मिलजायगी; क बिन्दु थ मे, ग बिन्दु प मे, और च बिन्दु ध मे मिल जायगा; परंच (त्रि·ज्या·१, ६ स्था· और त·ज्या·१, ८ सू·से) ख पार का पिण्डीय कोण द पर के पिण्डीय कोण मे मिलजाता है अतएव खच तल दभ तल मे और कउ तल थफ तल मे मिलते हैं। यतः खच तलीय क्षेत्र दभ तलीय क्षेत्रका सजातीय और उसके तुल्य है, और खच क्षेत्र की खच भुज दभ क्षेत्रकी दध भुज मे मिली है। अतः खच क्षेत्र की खउ, उच, और चच भुजा यथाक्रम दभ क्षेत्रकी दफ, फभ, और भध भुजोमे मिलेंगी। ऐसेहि कउ क्षेत्रकी खक और खउ भुजोंकेथफ क्षेत्रकी दथ और दफ भुजो से यथाक्रम मिलजाने तथा उन क्षेत्रोंके तुल्य और सजातीय होनेसे कअ भुजा थन मे, उअ भुजा फन मे, तथा अ बिन्दु न बिन्दु मे मिल जायगी। ऐसेहि च पर के पिण्डीयकोणको ध पर के पिण्डीय कोण के समान करने से इसीयुक्ति द्वारा उपपन्न हो सकता है कि चई क्षेत्र धव तलीय क्षेत्र मे मिलेगा अर्थात् चई क्षेत्र की गई भुज धव क्षेत्र की पव भुजमे, चई भुज भव मे, और ई बिंदु व बिंदुमे मिलेगा। इसीप्रकार खई पिण्ड को बनाने वाले सब तल और भुज अपनेर सजातीय दव पिण्डको बनाने वाले सब तल और भुजो मे मिलजायगे अर्थात् खई, और दव पिण्ड सर्वथा एक दूसरे से मिजायगे वा खई, दव पिण्ड एक दूसरे के समान और सजातीय होंगे। ऐसेहि और जो पिण्ड यथाक्रम स-

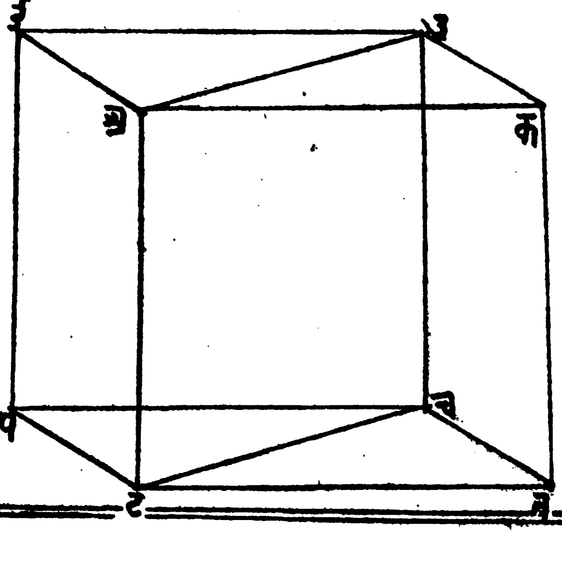
मान सजातीय और तुल्य संख्यक तलीय तेत्रों से वने और उनके पिण्डीय कोण तीन से अधिक तलीय कोणों से न वने हों तो वे भी एक दूसरे के समान और सजातीय होंगे।

अनुमान—ऐसे सब समास्त्र सम बहु तल सजातीय पिण्ड हों, और जब उनमे की एक २ भुज वा आंग तुल्य हों तो वे सब सर्वांशतः तुल्य होंगे।

## २४ साध्य

**जब कोई पिण्ड ऐसे छे तलों से बनाया जाय कि उनमे के दो २ तल समानान्तर हों। तो उस पिण्ड पर जो सन्मुख के तल होंगे वे एक दूसरे के सजातीय और तुल्य समानान्तर चतुर्भुज होंगे।**

कल्पना करो कि एक पिण्ड ऐसे छे तलों से बनाया गया है कि उनमे का अय तल कच के समानान्तर, ईक तल पत के समानान्तर, और चई तल तअ के समानान्तर है। तो उस पिण्ड पर जो सन्मुख के तल हैं वे एक दूसरे के सजातीय और तुल्य समानान्तर चतुर्भुज होंगे अर्थात् अय और कच सजातीय और तुल्य समानान्तर चतुर्भुज, ईक और पत सजातीय और तुल्य समानान्तर चतुर्भु



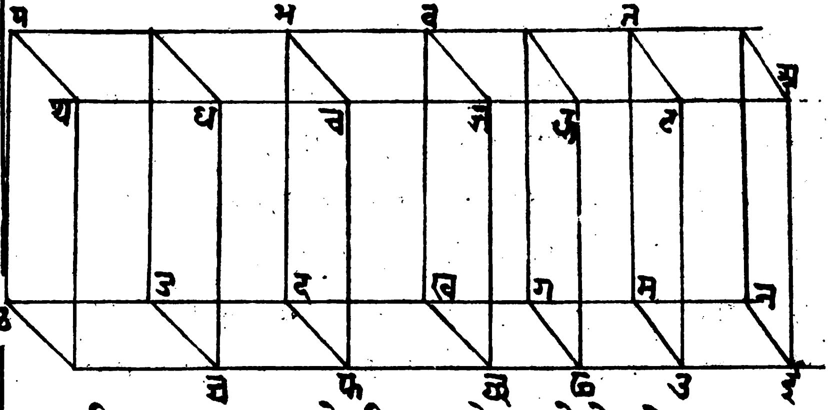
ज, तथा चई और तश सजातीय और तुल्य समानान्तर चतुर्भुज होंगे।

उपपत्ति। यतः ईक, पत समानान्तर तल अप तल से काटे जाते हैं अतः (प्र॰ ज्या॰ १, १८ सा॰ से) अई, टप समानान्तर हैं। यतः ईच, अत समानान्तर तलों को अप तल काटता है अतः (प्र॰ ज्या॰ १, १८ सा॰ से) अट, ईप समानान्तर रेखा होंगी परन्तु अई, टप समानान्तर है इसलिये अप समानान्तर चतुर्भुज हुआ ऐसे हि कच, ईक, पत, चई और तश ये सब समानान्तर चतुर्भुज हैं। अउ, टच रेखा मिला दो। यतः अई, टप समानान्तर, और ईउ, पच समानान्तर हैं अर्थात् ई बिन्दु पर संपात करने वाली अई और ईउ रेखा प बिन्दु मे संपात करने वाली टप और पच रेखाओं के समानान्तर हैं, तथा पहिली दो रेखाओं के तल मे दूसरी दो रेखा नहि हैं। अतः (प्र॰ ज्या॰ १, १० सा॰ से) अई, ईउ रेखाओं से बना हुआ अईउ कोण टप और पच रेखाओं से बने हुए टपच कोण के तुल्य है। परन्तु अईउ और टपच त्रिभुजों मे अई और टप भुज तुल्य ईउ और पच भुज तुल्य हैं। इस हेतु (प॰ ज्या॰ १, ४ सा॰ से) अउ और टच आधार तुल्य हैं तथा अईउ और टपच त्रिभुज तुल्य हैं परन्तु (प॰ ज्या॰ १, ३४ सा॰ से) अउ समानान्तर चतुर्भुज अईउ त्रिभुज से द्विगुण और टच समानान्तर चतुर्भुज टपच त्रिभुज से द्विगुण है इस हेतु अउ और टच समानान्तर चतुर्भुज समान और सजातीय हैं इसी प्रकार से अप और कच समानान्तर चतुर्भुज समान और सजातीय, अत और ईच समानान्तर चतुर्भुज तुल्य और सजातीय हैं।

## २५ साध्य

जब कोई समानान्तर षट्तल उससे मिले हुए दो

सन्मुख तलोंके समानान्तर गत किसी तलसे काटा जाय तो उससे विभक्त हूए दो समानान्तर षट तलोमे वह सम्बन्ध होगा जो उन के आधारोमेहै।
कल्पना करो कि भढ समानान्तर षट्तल उससे मिलेहूए दच, गक दो सन्मुख तलो के समानान्तर जाने वाले जख तल से काटा गया है। तो उससे विभक्त हूए दज और खक समानान्तर षट् तलो मे वह सम्बन्ध होगा जो उन के दछ और खढ आधारो मे है।




उपपत्ति। कल्पना करो कि दग रेखा दोनो और बढाकर उसमे से दड और उठ मे की प्रत्येक दख के समान, गम और मन मे की प्रत्येक खग के समान ली गई है; फेर उन पर फड, चठ, गउ, और मई समानान्तर चतुर्भुज, तथा उच, ठध, गट, और मअ समानान्तर षट्तल बनाये गये हैं। यतः ठड, उद, और दख एक दूसरे के समान हैं अतः (त·ज्या·१, ३८ और ३४ सा· तथा ६, (१) से) ठच, उफ, और दछ समानान्तर चतुर्भुज एक दूसरेके समान और सजातीय हैं; एसेहि उप, उभ, और दब समानान्तर चतुर्भुज एक दूस

रे के समान और सजातीय हैं, तथा (त्र॰ ज्या॰ ९, २४ सा॰ से) ठथ, उध, और दच समानान्तर चतुर्भुज भी एक दूसरे के समान और सजातीय हैं क्योंकि ये सन्मुख तल हैं। इसी प्रकार (त॰ ज्या॰ ९, ३९ और २४ सा॰ तथा ६, १५ से) खढ, गउ, और मई समानान्तर चतुर्भुज एक दूसरे के समान और सजातीय हैं; ऐसे हि गव, गन, और नन समानान्तर चतुर्भुज एक दूसरे के समान और सजातीय हैं; तथा (त्र॰ ज्या॰ ९, २४ सा॰ से) गऊ, मट और नञ समानान्तर चतुर्भुज भी एक दूसरे के समान और सजातीय हैं। इस हेतु ठध पिण्ड को बनाने वाले आसन्न तीन तल यथाक्रम उच पिण्ड को बनाने वाले आसन्न तीन तलो के समान और सजातीय, तथा दज पिण्ड को बनाने वाले आसन्न तीन तलो के भी समान और सजातीय हैं। परन्तु (त्र॰ ज्या॰ ९, २४ सा॰ से) सन्मुख के तल आपसमे समान और सजातीय होते हैं अतएव इन के सन्मुख के तीन २ तल भी यथाक्रम समान और सजातीय हैं। यतः उन समानान्तर षट्तलो के पिण्डीय कोणो मे का प्रत्येक तीन २ तलीय कोणो से बनाया गया है अतः (त्र॰ ज्या॰ ९, ३॰ सा॰ से) वे ठध, उच और दज समानान्तर षट् तल एक दूसरे के समान और सजातीय हैं। इसी युक्ति से खऊ, गट और मञ समानांतर षट्तल भी एक दूसरे के समान और सजातीय हैं। इस से प्रत्यक्ष है कि दढ आधार से ठढ आधार जितनी गुणे है उतनीहि गुणे दज पिण्ड से ठज पिण्ड है, और खढ आधार से खई आधार जितनी गुणे है उतनीहि गुणे खऊ पिण्ड से खञ पिण्ड है। इसी प्रकार जब ठढ आधार खई आधार के तुल्य है तो (त्र॰ ज्या॰ ९, ३॰ सा॰ से) ठज पिण्ड भी खञ पिण्ड के तुल्य है, जब ठढ आधार खई आधार से

कितनी गुणे बड़ा है तो ठज्ञ पिण्ड भी खञ्च पिण्ड से उतनीहि गुणे बड़ा है और जब ठछ आधार खई आधार से कितनी गुणे छोटा है तो ठज्ञ पिण्ड भी खञ्च पिण्ड से उतनी गुणे छोटा है अर्थात् (त॰ ज्या॰ ६, १०^मा^ प॰ से) ठछ और खई आधारों मे जो सम्बन्ध है वहि ठज्ञ और खञ्च पिण्डों मे है। परन्तु इहां दछ और खढ आधार, दज्ञ और खक पिण्ड ये चार राशीं हैं इनमे पहिली और दूसरी दो राशिओं को किसी एकहि गुण से गुणने से उनके ठछ और खई घातो मे वह सम्बन्ध (अबी सिद्ध हूआ) है कि जो तीसरी और चौथी दो राशिओं को किसी एकहि गुण से गुणन से उनके ठज्ञ और खञ्च घातो मे है। इसहेतु (त॰ ज्या॰ ६, ८^मा^ प॰ से) दछ और खढ आधारोमे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध दज्ञ और खक पिण्डो मे है।

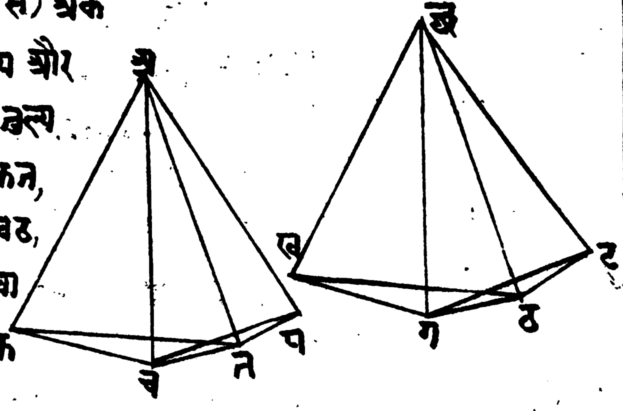
## २६ साध्य

**किसी निर्दिष्ट सरल रेखा मे उस के निर्दिष्ट विन्दु पर एक ऐसा पिण्डीय कोण बनाया चाहते हैं जो तीन तलीय कोणो से बने हूए निर्दिष्ट पिण्डीय कोण के समान हो।**

कल्पना करो कि अक निर्दिष्ट सरल रेखा और उसमे अनिर्दिष्ट विन्दु है खछठ, खछट, और टछठ इन तीन तलीय कोणो से बनाहूआ छ निर्दिष्ट पिण्डीय कोण है जो उस अक रेखा मे उसके अ विन्दु पर एक ऐसा पिण्डीय कोण बनाया चाहते हैं कि जो छ पिण्डीय कोण के समान हो। कर्त्तव्य छठ सरल रेखा के ठ विन्दु से खछट तल पर (त॰ ज्या॰ ५, ११ सा॰ से) ठग लम्बकरो और गछ रेखा कादो फेर अक रेखा के अ विन्दु पर किसी एकहि तल मे (त॰ ज्या

१, २३ सा॰ से) खछग कोण के तुल्य कअच कोण, और गछट कोण के तुल्य चअप कोण अर्थात् खछट कोण के तुल्य कअप तलीय कोण बनाकर छग के तुल्य अच कर लो। कअप तल गत उस च बिन्दु से उस तल पर (ऋ॰ ज्या॰ १, १२ सा॰ से) किया गया चत लम्ब गठ के तुल्य कर तअ रेखा मिला दो तो कअत कोण खछठ कोण के तुल्य और तअप कोण ठछट कोण के तुल्य अर्थात् अपर का पिण्डीय कोण छ पिण्डीय कोण के समान बन जायगा।

उपपत्ति। कल्पना करो कि (त॰ ज्या॰ १, ३ सा॰ से) अक को छख के तुल्य और अप को छट के तुल्य किया है; कच, कत, चप, पत, खग, खठ, टग, और टठ रेखा मिलाई गई हैं




यतः कअच और खछग त्रिभुजों मे अक रेखा को खछ के तुल्य, अच को छग के तुल्य, और कअच कोण को खछग कोण के तुल्य (बनाया है) अतः (त॰ ज्या॰ १, ४ सा॰ से) कच और खग आधार तुल्य हैं। यतः गठ रेखा खछट तल पर लम्ब और चत रेखा कअप तल पर लम्ब है अतः (ऋ॰ ज्या॰ १, ३ प॰ से) ∠ कचत, ∠ अचत, ∠ खगठ और ∠ छगठ में का प्रत्येक समकोण है। कचत और खगठ त्रिभुजों मे कच और खग तुल्य (सिद्ध हुए) हैं, चत और गठ तुल्य, कचत और खगठ समकोण (किये) हैं इस हेतु (त॰ ज्या॰ १, ४ सा॰ से) कत और खठ तुल्य हैं ऐसे ही अचत और छ

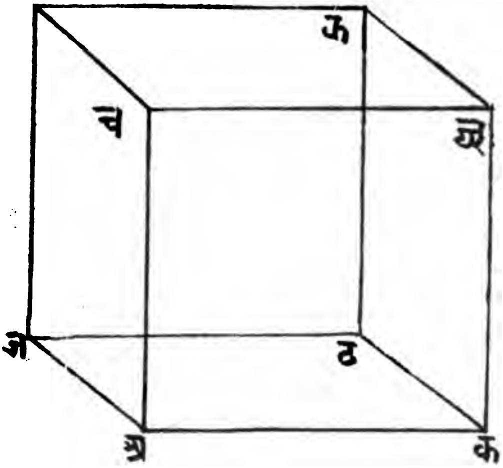
गठ त्रिभुजों मे अच और छग तुल्य, चत और गठ तुल्य, अचत और छगठ समकोण हैं इसकारण (त·ज्या·१,४सा·से) अत और छठ तुल्य हैं। कअत और खछठ त्रिभुजो मे अक और छख भुज तुल्य (किये) हैं, अत और छठ भुज तुल्य, कत और खठ आधार तुल्य (सिद्धहुए) हैं· इसलिये (त·ज्या·१, ८ सा·से) कअत और खछठ शीर्षकोण तुल्य हैं। इसीयुक्ति से तअप और ठछट कोण तुल्य होते हैं अर्थात् अपर के पिण्डीय कोण को बनाने वाले कअप, कअत और तअप तलीय कोण यथाक्रम छ पिण्डीय कोण को बनाने वाले खछट, खछठ और ठछट तलीय कोणो के समान हुए। अतएव (त·ज्या·१,२ सा·से) अक रेख के अ बिन्दु पर का पिण्डीय कोण छ पिण्डीय कोण के समान है।

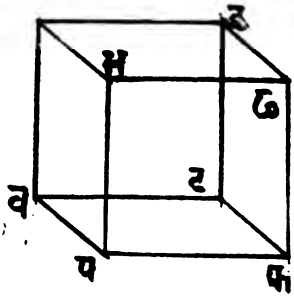
## २७ साध्य

**निर्दिष्ट सरल रेखा पर ऐसा समानान्तर षड्तल बनाया चाहते हैं कि जो निर्दिष्ट समानान्तर षड् तल का सजातीय हो।**

कल्पना करो कि अक निर्दिष्ट रेखा और पउ निर्दिष्ट समानान्तर षड् तल है। तो पउ का सजातीय अक रेखा पर समानान्तर षड्तल बनाना है।

कर्त्तव्य। (त·ज्या·१,२६ सा·से) अक रेखा मे उसके अ बिन्दु पर का पिण्डीय कोण प बिन्दु के पिण्डीय कोण के समान ऐसे बनाओ कि अ पर के पिण्डीय कोण को बनाने वाले जअच, जअक, और चअक तलीय कोणों मे का जअच कोण बपभ के तुल्य, जअक कोण बपफ के तुल्य, और चअक कोण भपफ कोण के तुल्य हो और (त·ज्या·६,१२




सा॰से) पफ से पभ का जो सम्बन्ध है अक से वहि सम्बन्ध रख ने वाली अच रेखा, पभ से पव का जो सम्बन्ध है अच से वहि सम्बन्ध रखने वाली अज रेखा वनालो। फिर कच समानान्तर चतुर्भुज वनाकर उस पर अऊ समानान्तर षट् तल वनाने से अक रेखा पर वनाया गया अऊ समानान्तर षट् तल पउ समानान्तर षट् तल का सजातीय होगा।

उपपत्ति। यतः अक, अच, और अज; पफ, पभ, और पव इन दो समूहो की तीन २ राशियों मे की दो २ मे यथाक्रम समान सम्बन्ध हैं अतः (त॰ ज्या॰ ५,१८ प्र॰से) पफ से पव का जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध अक से अज का है। यतः जक समानान्तर चतुर्भुज के कअज कोण को वनाने वाले कअ और अज भुजो मे वहि सम्बन्ध है जो वफ समानान्तर चतुर्भुज के फपव कोण को वनाने वाले फप और पव भुजो मे है। अतः (त॰ ज्या॰ ६, १४ प्र॰ से) सजातीय हैं। इसी युक्ति से जच और वभ समानान्तर चतुर्भुज सजातीय, तथा चक और भफ समानान्तर चतुर्भुज भी सजातीय है। अतएव अऊ समाना-

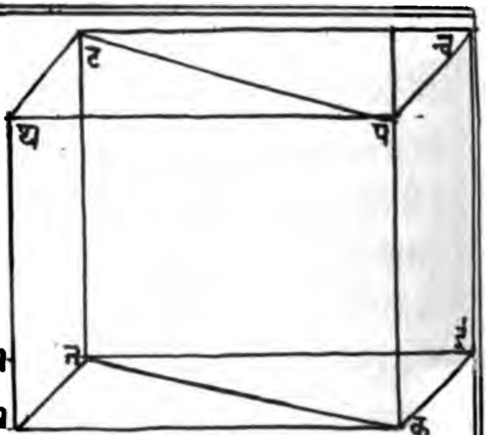
तर षट् तल के तीन तल यथाक्रम एउ समानान्तर षट् तल के तीन तलो के सजातीय हुए। परन्तु (च॰ज्या॰१,२४ सा॰से) समानान्तर षट् तल के सन्मुख के तल सजातीय और समान होते हैं। इस हेतु अऊ के शेष तीन यथाक्रम एउ के शेष तीन तलो के सजातीय हैं। यतः क पर के पिण्डीय कोण को बनाने वाले अकठ, अकछ, और ठकछ तलीय कोण यथाक्रम फ पर के पिण्डीय कोण को बनाने वाले एफट, एफढ और टफढ तलीय कोणो के समान हैं। अतः (च॰ज्या॰, ३ सा॰ से) क पर का पिण्डीय कोण फ पर के पिण्डीय कोण के समान है। इसी युक्ति से अऊ समानान्तर षट् तल के एक द्वितीयादि पिण्डीय कोण यथाक्रम एउ समानान्तर षट् तल के एक द्वितीयादि पिण्डीय कोणो के समान हैं। इस हेतु (च॰ज्या॰१,११ प॰ से) अऊ और एउ समानान्तर षट् तल एक दूसरे के सजातीय हैं।

## २८ साध्य

**जब एक समानान्तर षट् तल अपने ऊपर वाले सन्मुख तलो के कर्णो मे मिले हुए तल से काटा जाय तो वह तुल्य दो त्रिकोण समास्य तलो मे विभक्त होगा।**

कल्पना करो कि अच समानान्तर षट् तल उस पर के यच और अई समानान्तर चतुर्भुजों के टय और तक कर्णो मे मिले हुए तक तल से काटा गया है। तो वह तुल्य दो समास्य तलों मे विभक्त होगा।

उपपत्ति। यतः टत और एक मे की प्रत्येक यथ के समानान्तर है, और ये तीनो एक तल मे भी नहि हैं। अतः




(त्रि·ज्या·१, ६ सा·से) टत
और यक समानान्तर हैं।
यतः (त्रि·ज्या·१, ७ सा·से)
जिस तल मे टत और कप
समानान्तर रेखा हैं उसी मे
टय और तक हैं; और
यच और अई समानान्तर त-
ल उसी टक तल से काटे आ-
जाते हैं। अतः (त्रि·ज्या·१, १६ सा·से) उनके उभयनिष्ठ छेद ट-
य और तक रेखा समानान्तर है। यतः (त्रि·ज्या·१, २४ सा·से)
टयअ और पटच त्रिभुज सर्वतः तुल्य, तकअ और कतई त्रि-
भुज सर्वतः तुल्य हैं; तथा (त्रि·ज्या·१, २४ सा·से) यच और अ-
ई सम्मुख के तल सजातीय और समान हैं। अतः टयअ, पट-
च, तकअ और कतई त्रिभुज सर्वतः एक दूसरे के तुल्य हैं।
फेर (त्रि·ज्या·१, २४ सा·से) सम्मुख के टअ और चक समाना-
न्तर चतुर्भुज सजातीय और तुल्य हैं, तथा यक और टई स-
म्मुख के समानान्तर चतुर्भुज भी सजातीय और तुल्य हैं। अब
यतः एक समास्यतल पटच और कतई त्रिभुजों, चक, टई,
और टक समानान्तर चतुर्भुजो से बनाया गया है; और यथाक्र-
म उनहि के समान और सजातीय टयअ और तकअ त्रिभुजों,
टअ, यक, और टक समानान्तर चतुर्भुजो मे दूसरा समास्य तल
बनाया गया है, और उनमे का पिण्डीय कोण तीन से अधिक तली-
य कोणोसे नहि बनाया गया; अतः (त्रि·ज्या·१, ३ सा·से) ये दोनों
समास्य तल एक दूसरे के समान और सजातीय हैं अर्थात् अपने
आमने सामने सम्मुख तलों के कर्णो मे मिले हुए टक तल से काटागया

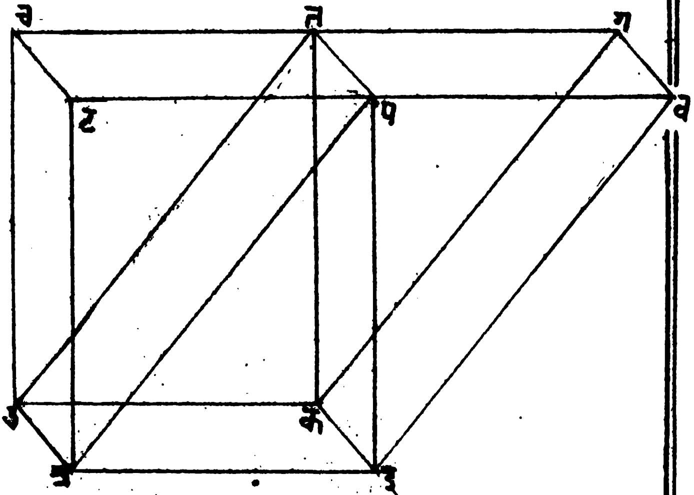
अच समानान्तर षट्तल तुल्य दो त्रिकोण समास्य तलों मे विभक्त हूआ।

## २९ साध्य

**एकहि आधार परके एकहि ऊंचाई वाले जिन समानान्तर षट्तलोंकी असग सरल रेखा आधार के सन्मुख तलगत उनहि सरल रेखाओं मे समाप्त हों वेएक दूसरे के समान होंगे।**

कल्पना करो कि अत और अग समानान्तर षट्तल किसी एकहि अक आधार पर एकहि ऊंचाई के हैं, और उनकी अद, अप, इप और इब असग सरल रेखा एकहि टब सरल रेखा मे समाप्त होतियें हैं; तथा उच, उत, कत, और कग असग सरल रेखा एकहि चग सरल रेखा मे समाप्त होतियें हैं। तो अत और अग पिण्ड समान होंगे।

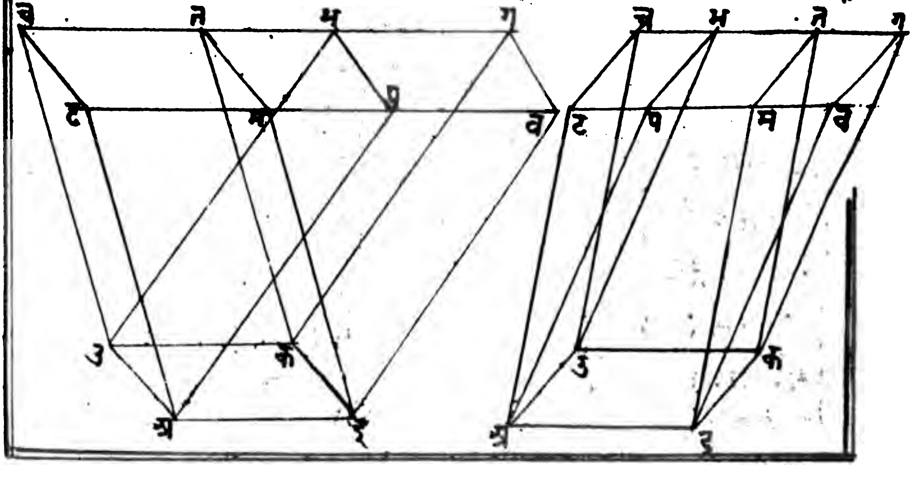
पहिला प्रकार। कल्पना करो कि अक आधार के सन्मुखवाले टप और पग समानान्तर चतुर्भुजों मे तप भुज उभय निष्ठ है।




यतः अपने ऊपरवाले टइ और चक सन्मुख तलों के अप और उत कर्णों मे मिले हूए उप तल से अत समा

नान्तर षट् तल काटा गया है। अतः (तृ·ज्या·१, २९ सा·से) अक प त्रिकोण समास्य तल से अत समानान्तर षट् तल द्विगुण है; ऐसेहि अग समानान्तर षट् तल भी अपने ऊपर वाले सन्मुख के अब और उग तलोंके पट और तक कर्णो मे मिले हूए कप तल से काटा गया है। इसलिये (तृ·ज्या·१, २९ सा·से) अग समानान्तर षट् तल भी उसी अकपत्रिकोण समास्य तल से द्विगुण है। इस हेतु (त·ज्या·१, ९ स्व·से) अत और अग समानान्तर षट् तल परस्पर समान हैं।

दूसरा प्रकार। कल्पना करोकि आधार के सन्मुख वाले टत और पग समानान्तर चतुर्भुज उभय निष्ठ भुज नहि रखते। यतः उत और उग समानान्तर चतुर्भुजों मे स्थित हूई चत और भग भुजो मे की प्रत्येक (त·ज्या·१, ३४ सा·से) उक के समान है। अतः चत और भग रेखा समान हैं इन दोनो मे तभ उभय निष्ठ जोड देने वा घटा देने से (त·ज्या·१, २ वा ३ स्व·से) चभ और गत समान हैं। परन्तु (तृ·ज्या·१, ३४ सा·से) उकर और उग समानान्तर चतुर्भुजों की उच = कत और उभ = कग

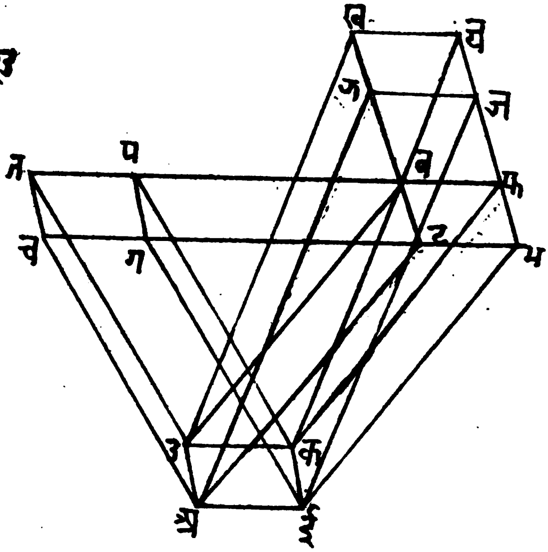


है इसहेतु चउभ त्रिभुजकी तीनों भुजा यथाक्रम तकग त्रिभुज की तीनो भुजोंके समान हैं। अतएव (त॰ ज्या॰ १, ८ सा॰ से) चउभ और तकग त्रिभुज सर्वतः समान हैं; तथा (त॰ ज्या॰ १, ३४ और २९ सा॰ से) चप और तब समनान्तर चतुर्भुज एक दूसरेके सर्वतः समान हैं। इसीयुक्ति से टअप और मईब त्रिभुज आपसमे सर्वतः समान और पूर्वोक्त त्रिभुजों के भी समान हैं। फेर (त॰ ज्या॰ १, ३४ सा॰ से) टउ और मक समानान्तर चतुर्भुज एक दूसरेके सर्वतः समान तथा उप और कव समानान्तर चतुर्भुजभी एक दूसरेके सर्वतः समान हैं। यतः चउभ और टअप त्रिभुजो, टउ, उप, और चप समानान्तर चतुर्भुजों से पअच समास्य तलबनाहै, और यथाक्रम उनके समान और सजातीय तकग और मईब त्रिभुजो, मक, कब, और तब समानान्तर चतुर्भुजोसे बईत समास्य तल बनाहै; और उनमे का पिण्डीय कोण तीन से अधिक तलीय कोणोसे नहि बना। अतः (त॰ ज्या॰ १, ७ सा॰ से) पअच और बईत समास्यतल आपसमे तुल्य हैं। अतएव अकचव एकहि पिण्ड मे से पृथक् २ पअच, और बईत तुल्य समास्य तल घटा देने से (त॰ ज्या॰ १, ३ प॰ से) शेष अत और अग समानान्तर षट् तल तुल्य हैं।

## ३° साध्य

एकहि आधार परके एकहि ऊंचांई वाले जिन समानान्तर षट् तलों की अखग सारल रेखा आधार के सन्मुख तलगत उनहि सारल रेखाओं मे समान नहि होतियें वे एक दूसरे के समान होते हैं।

कल्पना करो कि अप और अच समानान्तर खड़ तल किसी एकहि अक आधार पर एकहि ऊंचाई के हैं, और उस आधार पर खड़ी हुई अप पिण्ड की अच, इग, उन, और कप अलग सरल रेखा जिन चग और नप रेखाओं मे समाप्त होती हैं उनहि मे अच पिण्ड की अउ, ईज उख और कच अलग सरल रेखा समाप्त नहि होगियें। तो अप और अच समानान्तर खड़ तल समान होंगे।




उपपत्ति। कल्पना करो कि नप और चग रेखा बढाने से बढ़ीं हुई खक और घज रेखाओं मे ब, फ, ट और भ बिन्दुओं पर मिलतीं हैं; और उब, कफ, अट, और ईभ रेखा मिली हैं। यतः पउ और अग समानान्तर तलोमे हैं और जिस नफ और उक दो समानान्तर रेखाओं के तल मे उप है उसी तलमे उफ है तथा जिस चभ और अई दो समानान्तर रेखाओं के तल मे अग है उसी तलमे अभ है। अतः उफ और अभ समानान्तर तलो मे है। यतः अख और ईघ समानान्तर तलोमे हैं, उअ और खट समानान्तर रेखाओं के जिसतल मे अख है उसी तलमे अब हैं, और कई और घभ समानान्तर

रेखाओं के जिस तल मे ईच है उसी तल मे ईफ है अतः अव और ईफ समानान्तर तलों मे हैं; और अक आधार के समानान्तर जो तफ और चभ समानान्तर रेखाओं का तल है उसीमे टफ है। इस हेतु अक और टफ समानान्तर तलों मे हैं। यतः अक, टफ, अब, ईफ, उफ, और अभ इन छे मे के दो २ तल समानान्तर हैं; और इनहि से अफ पिण्ड बना है। अतः (च॰ज्या॰ ९, अ॰ प॰ से) अफ समानान्तर षट् तल है। यतः एकहि अक आधार परके अप और अफ पिण्डो की असग सरल रेखा उनहि रेखाओं मे समाप्त होतिये हैं अर्थात् अच, अट, ईग और ईभ असग सरल रेखा एकहि चभ रेखा मे समाप्त होतियें हैं; तथा उन, उव, कप, और कफ असग सरल रेखा एकहि तफ रेखामे समाप्त होतियें हैं। अतः (च॰ज्या॰ १,२९ सा॰ से) अप और अफ समानान्तर षट् तल समान हैं। ऐसेहि एकहि आधार परके अफ और अच समानान्तर षट् तलोंकी अट, अऊ, उव, और उख असग सरल रेखा एकहि खट रेखा मे, तथा ईभ, ईज, कफ और कच असग सरल रेखा एकहि जभ रेखा मे समाप्त होतियें है। इस हेतु (च॰ज्या॰ १, २९ सा॰ से) अफ और अच समानान्तर षट् तल समान हैं। इसलिये (त॰ज्या॰ १,१ स॰ से) अप और अच समानान्तर षट् तल समान हैं।

## ३१ साध्य

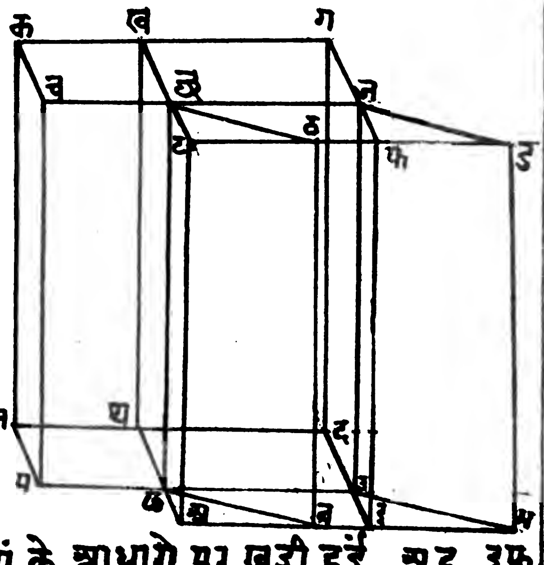
## एकहि ऊंचाई के वा तुल्य ऊचाइयों वाले जो समानान्तर षट् तल तुल्य आधारों पर बने हों वे तुल्य होंगे।

कल्पना करो कि अउ और पग्न तुल्य आधारों पर तुल्य ऊंचाई

के अज और पख समानान्तर षट् तल बने हैं। तो वे अज और पख समानान्तर षट् तल तुल्य होंगे।

१ प्रकार। कल्पना करो कि अउ और पथ तुल्य आधारों में के उढअ और पढथ कोण तुल्य हैं, और उन आधार तलों पर खड़ी हुई असग सरल रेखा उन पर लम्ब हैं। तो उन आधारों पर बने हुये तुल्य ऊंचाई के अज और पख समानान्तर षट् तल तुल्य होंगे।

उपपत्ति। कल्पना करो कि अउ और पथ आधार तल किसी एकहि तल में ऐसे रक्खे गये हैं कि उनमें की उढ और ढप भुजा मिल कर एक सरल रेखा बन गई है। तो यतः जिस तल में वे अउ और पथ आधार हैं ढ बिन्दु से उस तल पर खेंची गई एकहि ढछ लम्ब रेखा (त्रि·ज्या· ११, १२ सा·से) उन दोनो आधारों पर लम्ब रेखा है। अतः ढछ रेखा अज और पख दोनो समानान्तर षट् तलों में उभय निष्ठ है। फेर कल्पना करो कि उन




अज और पख पिण्डों के आधारों पर खड़ी हुई अट, इफ और उज; तथा तक, थख, और पच शेष असग सरल रेखा हैं। यतः अढउ और थढप कोण समान हैं। अतः (त·ज्या· १, १४ सा·से) अढ और ढथ रेखा मिल कर एक सूधी रेखा

है। कल्पना करो कि तथ और इउ बढ़ाने से द बिन्दु पर मिलती हैं, और ढद आधार पर ऐसा ढग समानान्तर षट् तल बना है जिसकी एक अलग सरल रेखा ढछ है। यतः अउ और पथ समानान्तर चतुर्भुज (प्रतिज्ञा मे) समान हैं। अतः (त॰ज्या॰ ६, १४ प॰से॰) ढद और अउ आधारों मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध ढद और पथ आधारों मे है। अब यतः अग समानान्तर षट् तल अपने ऊपर वाले अफ और थग सम्मुख तलों के समानान्तर गत ढछजउ तल मे काटा गया है। अतः (च॰ज्या॰ १, २५ सा॰से) ढद और अउ आधारों मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध ढग और अज समानान्तर षट् तलों मे है। ऐसे हि पग समानान्तर षट् तल भी अपने ऊपर वाले तच और दज सम्मुख तलों के समानान्तर गत यखछढ तल से काटा गया है। इसलिये (च॰ ज्या॰ १, २५ सा॰ से) ढद और पथ आधारों मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध ढग और पख समानान्तर षट् तलों मे है। इस हेतु (त॰ज्या॰ ६, ११ प॰से) ढग और अज समानान्तर षट् तलों मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध ढग और पख समानान्तर षट् तलों मे है। इस कारण (त॰ज्या॰ ६, ९ प॰से) अज और पख समानान्तर षट् तल तुल्य हैं।

२ प्रकार। कल्पना करो कि वउ और पथ तुल्य आधारों मे के पढथ और उढव कोण अतुल्य हैं, और उन आधार तलों पर खड़ी हुई अलग सरल रेखा उन पर लम्ब हैं। तो उन आधारों पर बने हुए तुल्य ऊंचाई के वज और पख समानान्तर षट् तल तुल्य होंगे।

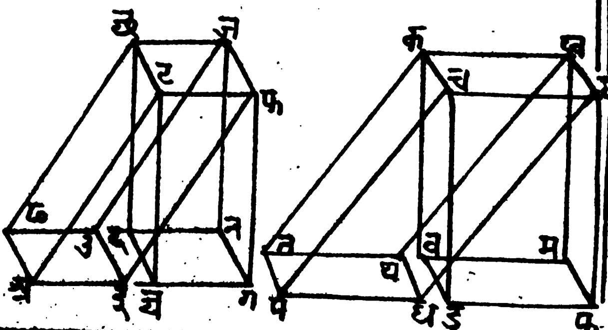
उपपत्ति। कल्पना करो कि वउ और पथ आधार तल किसी

एकहि तल मे ऐसे रक्खे गये हैं कि उनमे की उछ और छप रेखा मिलकर एक सरल रेखा बनी है। फेर मब और यछ बढाने से अ पर मिली हैं, ∴ यअ के समानान्तर उइ रेखा खेंची गई है; तथा तथ और इउ बढाने से र पर मिली हैं फेर अउ और छद आधारों पर अज और छग समानान्तर षट् तल बनाये गये हैं। यतः एकहि छज आधार पर बने हुए एकहि ऊंचाई के अज और बज समानान्तर षट् तल (वृ·ज्या·१, २९ सा·से) तुल्य तथा (पहिले प्रकार से) अज और पख समानान्तर षट् तल तुल्य हैं। अतः बज और पख समानान्तर षट् तल तुल्य हैं।

२ प्रकार। कल्पना करो कि अउ और पथ तुल्य आधार तलो पर खड़ी हुई छच, उज, इफ, अट, तक, थख, धऊ और पच असग सरल रेखा उन पर लम्ब नहि हैं। तो उन आधारो पर बने हुए तुल्य ऊंचाई के अज और पख समानान्तर षट् तल तुल्य होंगे।

उपपत्ति। कल्पना करो कि ट, छ, ज, और फ; च, क, ख, और ऊ बिन्दुओं से (वृ·ज्या·१, ११ सा·से) टघ, छद, जन और फग; चड, कब, खम, और ऊफ लम्ब उन तलो पर किये हैं जिन मे अउ और पथ आधार हैं; और घद, दन, नग और गघ; तथा डब, बम, मफ और फड रेखा मिलाई हैं।

यतः टघ और फग रेखा एकहि तल पर लम्ब हैं। अतः (वृ·ज्या·१, ६ सा·से) टघ और फग



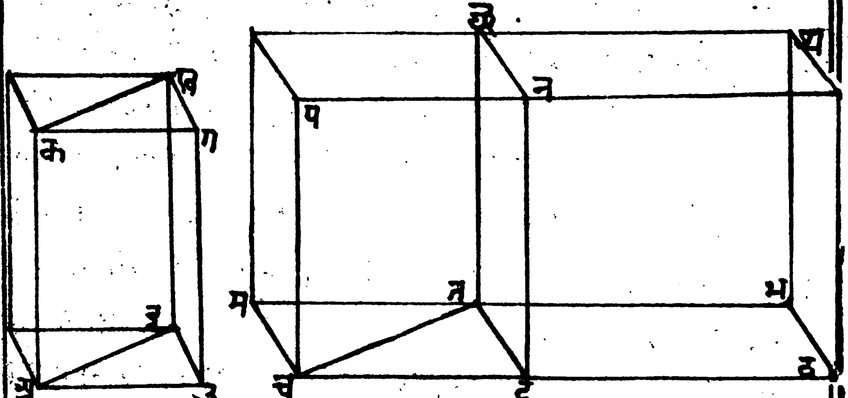
समानान्तर हैं। परन्तु छट और जफ भी समानान्तर रेखा हैं अर्थात् एकही छच तल मे स्थित हुई२ एक दूसरी से ट बिन्दु पर योग करने वाली टच और छट रेखा, दूसरे जगतल मे स्थित हुई२ एक दूसरी से फ बिन्दु पर योग करने वाली फग और जफ रेखाओं के समानान्तर हैं। इसहेतु (च॰ज्या॰९,१५सा से) छच और जग तल समानान्तर हैं। इसी प्रकार जद औ र फच तल भी समानान्तर हैं। इसहेतु (च॰ज्या॰९, अ॰प॰से चज समानान्तर षट् तल है। इसी युक्ति से उख भी समाना न्तर षट् तल है। यतः टज और चख तुल्य आधारों पर बने हु ए चज और उख समानान्तर षट् तलों की उचाई तुल्य है और उन आधार तलों पर खड़ी हुई अलग सरल रेखा उन पर लम्ब हैं। अतः (पहिले वा दूसरे प्रकार॰ से) चज और उख समा नान्तर षट् तल तुल्य हैं। परन्तु अज और चज़ समानान्त र षट् तल एकहि आधार पर एकहि ऊचाई के हैं। इसहेतु (च॰ज्या॰९,२९ वा ३०सा॰से) अज और चज समानान्तर षट् तल समान हैं। इसी प्रकार पख और उख समानान्तर षट् तल तुल्य हैं। इसलिये अज और पख समानान्तर षट् तल तुल्य हैं।

## ३२ साध्य

## एकहि ऊचाईवाले वा तुल्य ऊचाइयों के समा नान्तर षट् तलों मे वह सम्बन्ध होगा जो उनके आधारों मे है।

कल्पना करो कि उक और चन आधारो पर बने हुए अ प और चक समानान्तर षट् तल तुल्य ऊचाईयों के हैं। तो उक और चन आधारो मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध

अख और चछ समानान्तर षट् तलों मे होगा।




उपपत्ति। कल्पना करो कि चतट तलमे तट रेखा पर उक समानान्तर चतुर्भुज के समान (त·ज्या·१, ४५ सा·से) ऐसा तठ समानान्तर चतुर्भुज बनायागया है कि जिसका भतट कोण तमच कोण के समान है, और उस तठ आधार पर चछ की ऊंचाई के समान ऊंचाई वाला टथ एसा समानान्तर षट् तल बना है कि तछ उस की एक अलग सरल रेखा है। यतः चछ और टथ एकहि ऊंचाई के हैं अतः (च·ज्या·१, ३१ सा·से) अख पिण्ड टथ के समान है। यतः चथ समानान्तर षट् तल अपने उपरि गत सन्मुख तलों के समानान्तर जाने वाले टछ तल से काटा गया है। अतः (च·ज्या·१, २५ सा·से) तठ और चत आधारो मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध टथ और चछ पिण्डोंमे है। परन्तु तठ आधार उक आधारके समान और टथ पिण्ड अख पिण्ड के समान है। इसलिये उक और चत आधारो मे जो सम्बन्ध है अख और चछ समानान्तर षट् तलों मे भी वहि सम्बन्ध है।

अनुमान। इसीसे विदित होताहै कि त्रिकोण आधारो पर बने हूए एकहि ऊंचाईवा बरा ऊचाइयों के समास्र तलो मे वह सम्बन्ध होताहै जो उनके आधारो मे है। कल्पना करोकि △ अइउ और △ कखग; △ चतट और △ पछन इन समास्र तलोंके अन्तर्गत △ अइउ, और △ चतट त्रिकोण आधारो पर बने हूए समास्र तलोंकी ऊचाई एकही वा तुल्य है। तौ उन मे वहि सम्बन्ध होगा जो उनके आधारो मे है। क्योंकि जब अइउ और चतट त्रिभुजो पर अइ, और चत समानान्तर चतर्भुज बना कर उन पर अख और चछ समानान्तर खट तल एसे बनालें कि जिन मे उग, और ट न अखग सरल रेखा हों। तौ एतः अख, और चछ समानान्तर षट तल एकहि ऊंचाई के हैं। अतः अइ आधार और चत आधार मे जो सम्बन्ध है वहि अख और चछ समानान्तर षट तलो मे है। परन्तु (त॰ ज्या॰ १, ४१ सा॰से) ▱ अइ का △ अइउ आधा और ▱ चत का △ चतट आधा; तथा (च॰ ज्या॰ १, २८ सा॰से) अख समानान्तर षट तल का इउक समास्र तल आधा, और चछ समानान्तर षट तल का तटप समास्र तल आधाहै इसलिये (त॰ ज्या॰ ६, ८ प॰से) अइउ और चतट त्रिकोण आधारो मे जो सम्बन्ध है वहि इउक और तटप समास्र तलों मे है।

२ अनुमान। समान आधारों वाले समानान्तर खट तलों मे वहि सम्बन्ध होता है जो उन की ऊचाईयों मे है।

## ३२ साध्य

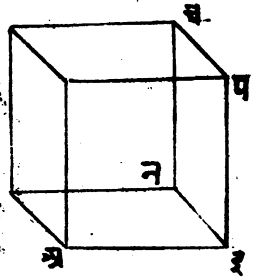
## सजातीय समानान्तर षट् तलों मे वही संबंध

होगा जो उनकी समगुण* वा सजातीय भुजो+का त्रिकलीकृत सम्बन्ध है।

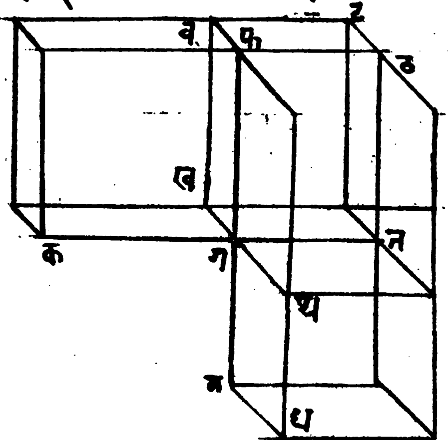
कल्पना करो कि अच और कब सजातीय समानान्तर षट् तलों की समगुण भुजे अइ और कग हैं। तो अइ और कग का जो त्रिकलीकृत सम्बन्ध है वही सम्बन्ध अच और कब पिण्डों मे होगा।

उपपत्ति। कल्पना करो कि बढी हुई कग, खग और फग रेखाओं मे की गत = अइ, गथ = इन, और गम = इप हैं; इनसे बने हुए तथ, तम, और थम समानान्तर चतुर्भुजों से जध समानान्तर षट् तल बना है।

यतः (प्रतिज्ञामे) अच और कब पिण्ड सजातीय, अइ और कग समगुण भुजा हैं। अतः अइन कोण कगख कोण के समान है। परन्तु (त·ज्या·१, १५ सा·से) कगख कोण तगथ कोण के समान है अतएव तगथ और अइन कोण तुल्य हैं। यतः गत = अइ, गथ = इन और गम = इप (बनाए हुए) हैं। अतः तथ समानान्तर चतु-




भुज अन का सजातीय और उस के समान




* जिन भुजों पर समान तृतीय कोण वा द्वितीय कोण और समान सजातीय क्षेत्र वा पिण्ड आप वा सजातीय क्षेत्र वा पिण्ड बनते हैं वे समगुण भुज कहलाते हैं।

\+ आन्तरेखा वा अङ्ग सरल रेखा को भुजा कहते हैं।

है। इसीप्रकार से तम समानान्तर चतुर्भुज अप समानान्तर चतुर्भुज का सजातीय और उस के समान, और थम समानान्तर चतुर्भुज इच समानान्तर चतुर्भुजक सजातीय और उस के समान है। इसलिये तथ पिण्ड के तीन समानान्तर चतुर्भुज अच पिण्ड के तीन समानान्तर चतुर्भुजो के यथाक्रम सजातीय और समान हैं परन्तु (ज॰ ज्या॰ १, २४ सा॰ से) प्रत्येक पिण्ड पर के सन्मुख के तीन २ समानान्तर चतुर्भुज भी उनही के सजातीय और समान हैं। इस हेतु (व॰ ज्या॰ १, ३सा॰ से) तथ पिण्ड अच पिण्ड का सजातीय और उसके समान है। खत समानान्तर चतुर्भुज बना कर, खत और तथ आधारों पर कब पिण्ड की ऊंचाई के तुल्य ऊंचाई वाले गट और थठ ऐसे समानान्तर षट् तल बनाओ कि जिनमे गफ पक अखण्ड सरल रेखा हो। यतः कब और अच पिण्ड सजातीय हैं, कग और गख मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध अइ और इन मे है। अतः (एकान्तर निष्पत्तिसे) कग और अइ मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध गख और इन मे तथा वहि सम्बन्ध गफ और इप मे है। परन्तु अइ के समान गत, इन के समान गथ, और इप के समान गम है। इस हेतु कग और गत मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध खग और गथ मे, और वहि सम्बन्ध गफ और गम मे है। परन्तु (त॰ ज्या॰ ८, १ सा॰ से) कग और गत मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध कख और खत समानान्तर चतुर्भुजो मे है, खग और गथ मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध खत और तथ समानान्तर चतुर्भुजो मे है,

तथा गफ और गम मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध गठ और त म समानान्तर चतुर्भुजो मे है। इसलिये कख और खत समानान्तर चतुर्भुजोमे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध खत और तथ मे, और वहि हि सम्बन्ध गठ और तम मे है। परन्तु (उ·ज्या·१, २५ सा·से) कख और खत समानान्तर चतुर्भुजो मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध कब और गट पिण्डोमे है, खत और तथ मे जो सम्बन्ध वहि सम्बन्ध गट और थठ पिण्डों मे है, और जो सम्बन्ध गठ और तम मे है वहि सम्बन्ध थठ और तध पिण्डो मे है। इसहेतु जो सम्बध कब और गट पिण्डो मे है, वहि गट और थठ पिण्डों मे, और वहि थठ और तध पिण्डों मे है अर्थात् कब ÷ गट = गट ÷ थठ = थठ ÷ तध है इसहेतु (उ·ज्या· १, ग प·से) कब, गट, थठ, और तध ये चार राशियें अवारित अनुपात की हैं। इसलिये (उ·ज्या·१, च प·से) कब और तध पिण्डो मे वह सम्बन्ध है जो कब और गट का त्रिकलीकृत सम्बन्ध है। परन्तु कब और गट मे वह सम्बन्ध है जो कख और खत समानान्तर चतुर्भुजो मे का कग और गत सरल रेखाओं मे है। इसलिये कब और तध पिण्डो वह सम्बन्ध है जो कग और गत सरल रेखाओं का त्रिकलीकृत सम्बन्ध है। परन्तु तध पिण्ड अच पिण्ड के समान और गत रेखा अइ रेखा के समान है इसकारण कब और अच पिण्डों मे वह सम्बन्ध है जो कग और अइ रेखाओं का त्रिकलीकृत सम्बन्ध है अर्थात् कब और अच सजातीय पिण्डें मे वह सम्बन्ध हूआ जो उन की कग और अइ समगुण भुजोंका त्रिकलीकृत सम्बन्ध है।

अनुमान। इससे यह प्रकट है कि अवारित अनुपात की चार सरल रेखायों मे की पहिली और दूसरी को भुजा मान कर उनपर जो यथाक्रम सजातीय समानान्तर षट् तल बनाए जाय तौ उनमे वह सम्बन्ध होगा जो उक्त रेखा ओ मे की पहिली और चौथी मे है। क्योंकि उनमे की पहिली और चौथी मे जो सम्बन्ध है वहि पहिली और दूसरी का त्रिकलीकृत सम्बन्ध है, और सजातीय समानान्तर षट् तलों मे वह सम्बन्ध है जो उनकी समगुण भुजो का त्रिकलीकृत सम्बन्ध वा उन रेखाओं का त्रिकलीकृत सम्बन्ध है जिन पर वे पिण्ड बनाए गये हैं।

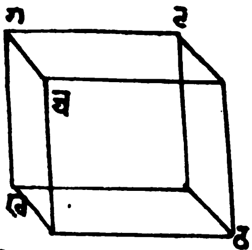
च परिभाषा। कई सम्बन्धो की मुख्य २ और अमुख्य २ राशियों के घातों से जो सम्बन्ध बनता है वह उन सम्बंधो का संगृहीत संबन्ध कहलाता है वा किसी समूह गत कई राशियों मे की पहिली दूसरी से कोई सम्बन्ध, और दूसरी आदि तीसरी आदियों मे चाहे कई प्रकार के सम्बन्ध हों तौ उस समूह के आदि और अन्त्य का जो सम्बन्ध है वह उन सम्बन्धो का संगृहीत सम्बन्ध कहलाता है। यथा जब कल्पना करो कि $\frac{अ}{इ}$, $\frac{उ}{क}$ और $\frac{ख}{ग}$ कोई सम्बन्ध हैं तौ $\frac{अ \times उ \times ख}{इ \times क \times ग}$ उनका संगृहीत सम्बन्ध हैं वा किसी समूह की प, फ, ब और भ चार राशि हैं। तौ $\frac{प}{फ}$, $\frac{फ}{ब}$, और $\frac{ब}{भ}$ संबन्धो का $\frac{प}{भ}$ संगृहीत सम्बन्ध है जब $\frac{अ}{इ} = \frac{प}{फ} = \frac{उ}{क} = \frac{फ}{ब}$, और $\frac{ख}{ग} = \frac{ब}{भ}$ हो तौ $\frac{अ}{इ}$, $\frac{उ}{क}$ और $\frac{ख}{ग}$ सम्बन्धो का भी $\frac{प}{भ}$ संगृहीत सम्बन्ध है

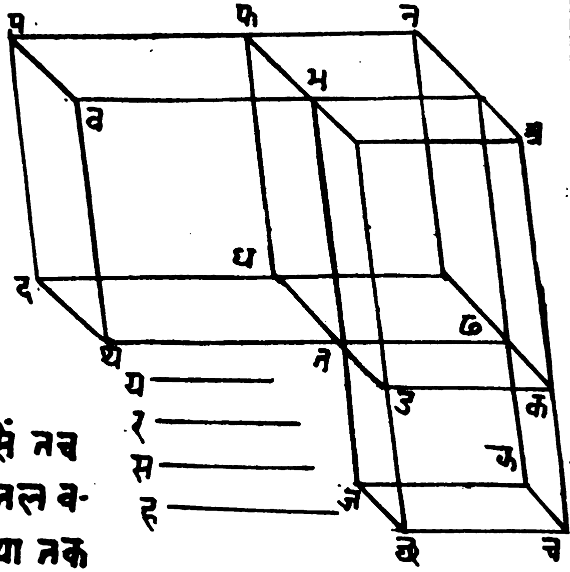
## कसाध्य

**जिन समानान्तर षट तलो के बनाने वाले समानान्तर चतुर्भुजो मे का एक एक के तुल्य कोण और दूसरे आदि दूसरे आदियों के तुल्य कोण हो अर्थात् जिनमे का एक पिण्डीय कोण एक के और दूसरे आदि पिण्डीय कोण दूसरे आदियों के तुल्य हो उनमे वह सम्बन्ध होगा जो उनकी भुजो का संग्रहीत है अर्थात् जो उनके एक २ पिण्डीय कोण को बनाने वाली भुजाओं मे के एक एक, दूसरे दूसरे, और तीसरे तीसरे के सम्बन्धो का संग्रहीत सम्बन्ध है।**

कल्पना करो कि ठख, ठच, और ठट समानान्तर चतुर्भुजों से ठग समानान्तर षट् तल बनाया गया; तद, तब, और तफ समानान्तर चतुर्भुजों से तप समानान्तर षट् तल बनाया है जिनमे के ठख और तद तुल्य कोण, ठच और तब तुल्य कोण, तथा ठट और तफ तुल्य कोण हैं अर्थात् ठ, ख, च, और ट आदि विन्दुओं पर के पिण्डीय कोण यथाक्रम त, द, ब और फ आदि विन्दुओं पर के पिण्डीय कोणों के तुल्य बने हैं। तो ठग और तप पिण्डों मे वह सम्बन्ध होगा जो गट ÷ तथ, गच ÷ तध और गख ÷ तभ सम्बन्धो का संग्रहीत सम्बन्ध है।

उपपत्ति। कल्पना करो कि तथ, तध, और तभ रेखाओंको त की ओर अपनी सूध मे ढ, ड, और ज विन्दुओं तक बढा कर तढ को गट के तुल्य, तड को गच के तुल्य, और तज को गख के तुल्य कर लिया है। फेर ठख, ठच और ठट समानान्तर चतुर्भुजो के यथाक्रम सजातीय और तुल्य उन





रेखाओं से तक, तऊ और तछ समानान्तर चतु-र्भुज बनाकर उनसे तच समानान्तर षट्तल बनायागया है; तथा तक और धछ आधारों पर तअ और तन ऐसे समानान्तर षट्तल बनाए गये हैं कि जिनमे तभ अखग सरल रेखा है। यतः ठग और तच पिण्ड तुल्य संख्यक, सजातीय, और तुल्य समानान्तर चतुर्भुजों से बनें हैं, और उन मे का प्रत्येक पिण्डीय कोण तीन तलीय कोणो से बना है। अतः (च॰ ज्या॰ २, ३ सा॰ से) तच पिण्ड ठग का सजातीय और उसके तुल्य है। यतः थन समानान्तर षट्तल के अपने ऊपर वाले सन्मुख तलों के समानान्तर गत तफ तल से काटे जाने से तप और तन समानान्तर षट्तल बने हैं। अतः (च॰ ज्या॰ १, २५ सा॰ से) धछ और तद आधारों मे जो सम्बन्ध है वही तन और तप मे है। परन्तु (त॰ ज्या॰ ६, १ सा॰ से) तछ और थत मे जो सम्बन्ध है वही धछ और तद मे है। इस हेतु तछ और थतमे जो सम्बन्ध है वही तन और तप पिण्डों मे है वा $\frac{तछ}{थत} = \frac{छतन}{छतप}$ है।

परन्तु तढ को गट के तुल्य किया है। इसहेतु $\frac{\text{गट}}{\text{तथ}} = \frac{\text{□तन}}{\text{□तप}}$ है। इसी प्रकार से $\frac{\text{गच}}{\text{तध}} = \frac{\text{□तञ}}{\text{□तन}}$, और $\frac{\text{गख}}{\text{तभ}} = \frac{\text{□तच}}{\text{□तञ}}$ वा $\frac{\text{□ठग}}{\text{□तञ}}$ है। और तुल्य पदार्थों को तुल्य संख्या से गुणे तो गुणनफल तुल्य होते हैं। इसलिये $\frac{\text{गट}}{\text{तथ}} \times \frac{\text{गच}}{\text{तध}} \times \frac{\text{गख}}{\text{तभ}} = \frac{\text{□तन}}{\text{□तप}} \times \frac{\text{□तञ}}{\text{□तन}} \times \frac{\text{□ठग}}{\text{□तञ}} = \frac{\text{□ठग}}{\text{□तप}}$ वा गट · गच · गख ÷ तथ · तध · तभ :: □ठग ÷ □तप है। अर्थात् गट ÷ तथ, गच ÷ तध और गख ÷ तभ सम्बन्धों का जो गट · गच · गख ÷ तथ · तध · तभ (च प · से) संग्रहीत सम्बन्ध है वह ठग और तप पिण्डों में हुआ।

प्रकारान्तरोपपत्ति। प्रस्तुत चित्र में ठग और तच सर्वतन तुल्य किये हैं। यतः (त · ज्या · ६, २३ सा · से) $\frac{\text{तढ · तउ}}{\text{तथ · तध}}$ वा $\frac{\text{गट · गच}}{\text{तथ · तध}} = \frac{\text{▫तक}}{\text{▫तद}}$, और (त्रि · ज्या · १, ३१ सा · से) $\frac{\text{▫तक}}{\text{▫तद}} = \frac{\text{□तञ}}{\text{□तप}}$ है। इसहेतु $\frac{\text{गट · गच}}{\text{तथ · तध}} = \frac{\text{□तञ}}{\text{□तप}}$ है। परन्तु (त्रि · ज्या · १, २५ सा · और त · ज्या · ६, १ सा · से) $\frac{\text{तज}}{\text{तभ}} = \frac{\text{□तच}}{\text{□तञ}}$, वा $\frac{\text{गख}}{\text{तभ}} = \frac{\text{□ठग}}{\text{□तञ}}$ है। इसलिये $\frac{\text{गट · गच · गख}}{\text{तथ · तध · तभ}} = \frac{\text{□तञ · □ठग}}{\text{□तप · □तञ}} = \frac{\text{□ठग}}{\text{□तप}}$ है अर्थात् $\frac{\text{गट}}{\text{तथ}}$, $\frac{\text{गच}}{\text{तध}}$, और $\frac{\text{गख}}{\text{तभ}}$ सम्बन्धों का जो $\frac{\text{गट · गच · गख}}{\text{तथ · तध · तभ}}$ संग्रहीत सम्बन्ध है वह ठग और तप पिण्डों में है।

पुनः प्रकारान्तरोपपत्ति। कल्पना करो कि य एक कल्पित रेखा है। गख वा तज से तभ का जो सम्बन्ध है (त॰ ज्या॰ ६, १२ सा॰ से) य से वहि सम्बन्ध रखने वाली रेखा, गच वा तउ से तध का जो सम्बन्ध है र से वहि सम्बन्ध रखने वाली स रेखा, तथा गट वा तढ से तथ का जो सम्बन्ध है स से वहि सम्बन्ध रखने वाली ह रेखा कूंउली है। प्रस्तुत चित्र मे ठग और तच पूर्ववत् तुल्य किये हैं। इसलिये (त॰ ज्या॰ १, २५ सा॰ और त॰ ज्या॰ ६, २ सा॰ से) $\frac{\text{तज}}{\text{तभ}}$ वा $\frac{\text{य}}{\text{र}} = \frac{\square\,\text{तच}}{\square\,\text{तञ}}$ वा $\frac{\square\,\text{ठग}}{\square\,\text{तञ}}$,

$\frac{\text{तउ}}{\text{तध}}$ वा $\frac{\text{र}}{\text{स}} = \frac{\square\,\text{तञ}}{\square\,\text{तन}}$, तथा $\frac{\text{तढ}}{\text{तथ}}$ वा $\frac{\text{स}}{\text{ह}} = \frac{\square\,\text{तन}}{\square\,\text{तप}}$

इसलिये एक समूह गत य, र, स, और ह चार रेखाओं मे की आसन्न दो२ मे जो२ सम्बन्ध हैं दूसरे समूह गत ठग, तञ, तन और तप पिण्डों मे के आसन्न दो२ मे यथाक्रम वहि सम्बन्ध हैं। तो (त॰ ज्या॰ ५, ९ सा॰ पी॰ से) य और ह मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध ठग और तप पिण्डोंमे है। परन्तु $\frac{\text{य}}{\text{र}}$, $\frac{\text{र}}{\text{स}}$, और $\frac{\text{स}}{\text{ह}}$ सम्बन्धोका वा $\frac{\text{गख}}{\text{तभ}}$, $\frac{\text{गच}}{\text{तध}}$ और $\frac{\text{गट}}{\text{तथ}}$ सम्बन्धोका (च॰ प॰ से) $\frac{\text{य}}{\text{ह}}$ यह संग्रहीत सम्बन्ध है। इसहेतु $\frac{\text{गट}}{\text{तथ}}$, $\frac{\text{गच}}{\text{तध}}$ और $\frac{\text{गख}}{\text{तभ}}$ सम्बन्धोका जो संग्रहीत सम्बन्ध है वहि ठग और तप पिण्डों मे है।

## ३४ साध्य

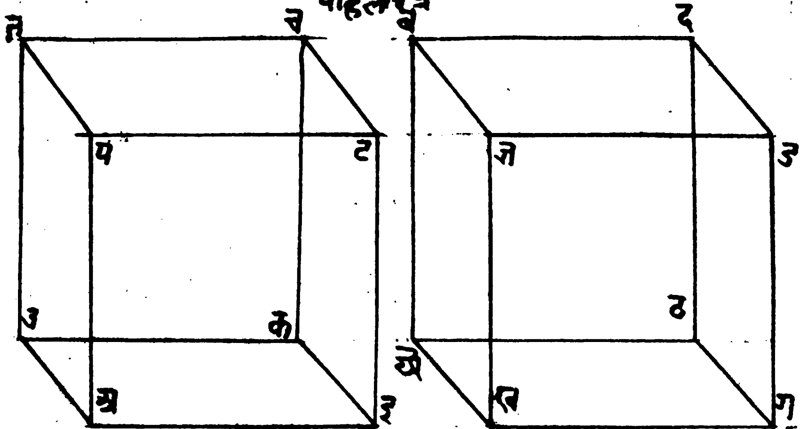
**जो दो समानान्तर षट् तल तुल्य हैं उनके आधार और ऊंचाइयें अन्योन्याश्रय सम्बन्धि होंगे अर्थात् एक दूसरे के आधारो मे जो सम्बन्ध है**

**यदि दूसरे एक की ऊंचाई मे होगा, और जब दो समानान्तर षट् तलों के आधार और ऊंचाइयें अन्योन्याश्रय सम्बन्धि हों तब वे एक दूसरे के तुल्य होंगे।**

कल्पना करो कि अच और खद समानान्तर षट् तल तुल्य हैं। तो उनके आधार और ऊंचाइयें अन्योन्याश्रय सम्बन्धि होंगे अर्थात् अच पिण्ड के ▭इउ आधार और खद पिण्ड के ▭गछ आधार मे जो सम्बन्ध है वहि खद की ऊंचाई और अच की ऊंचाई मे होगा।

१ प्रकार। कल्पना करो कि अच और खद पिण्डो की उन, अप, कच और इट; खव, खज, ठद और गउ अखण्ग सरल रेखा उनके ▭इउ और ▭गछ आधारों पर लम्ब हैं तो उनके आधार और ऊंचाइयें अन्योन्याश्रय सम्बन्धि होंगे।

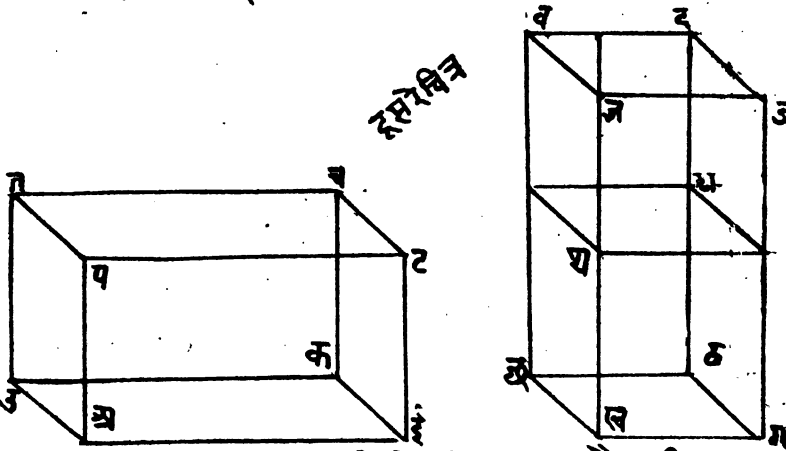
पहिले चित्र




उपपत्ति। जब ▭इउ आधार ▭गछ आधार के तुल्य हो तो यतः अच और खद समानान्तर षट् तल (प्रतिज्ञा मे) तुल्य कहे हैं। अतः अप और खज लम्ब वा ऊंचाई भी समान होंगी। क्योंकि जब ▭इउ और ▭गछ आधार समा-

न हैं, अप और खज ऊंचाई समान न हों। तो (उ॰ ज्या॰ ११, ३२ सा॰ २ अ॰ से) अच और खद समानान्तर षट्तल भी तुल्य न होंगे। परन्तु अच और खद समानान्तर षट्तल (प्रतिज्ञा मे) तुल्य हैं। इसलिये अप और खज उंचाइयें भी तुल्य ही हैं। इसहेतु अच पिण्ड के ▫ इउ आधार और खद पिण्ड के ▫ गछ आधार मे जो सम्बन्ध है वहि खद पिण्ड की खज ऊंचाई और अच पिण्ड की अप ऊंचाई मे है। जब ▫ इउ और ▫ गछ आधार तुल्य नहि हैं। कल्पना करो कि ▫ इउ आधार ▫ गछ आधार से बड़ा है। तो अप से खज भी अवश्य बड़ा होगा। क्योंकि जब अप के खज समान वा उससे छोटा हो तो (उ॰ ज्या॰ ३२ सा॰ और उसके २ अ॰ से) खद समानान्तर षट् तल, अच समानान्तर षट् तल से छोटा वा छोटे से छोटा होता है। परन्तु (प्रतिज्ञा मे) अच और खद समानान्तर षट् तल समान हैं। इसकारण अप से खज अवश्यमेव बड़ा है। दूसरे चित्रों मे देखो जहां (उ॰ ज्या॰ ११, ३ सा॰ से) खज मे से अप के समान खय रेखा काट कर ▫ गछ आधार पर खय ऊंचाई वाला खध समानान्तर षट् तल बनाओ। यतः अप और खय तुल्य हैं। अतः (उ॰ ज्या॰ ११, ३२ सा॰ से) ▫ इउ और ▫ गछ आधारो मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध अच और खध समानान्तर षट् तलो मे है। परन्तु अच और खद (प्रतिज्ञा मे) तुल्य हैं। अतः (त॰ ज्या॰ ५, ७ प॰ से) अच और खध मे जो सम्बन्ध है वहि खद और खध मे है, (त॰ ज्या॰ ५, ११ प॰ से) ▫ इउ और ▫ गछ मे जो सम्बन्ध है वहि खद और खध पिण्डो मे है। परन्तु (उ॰ ज्या॰ ११, ३२ सा॰ से) खद और खध मे वह सम्बन्ध है जो उनके खज और खय

आधारों मे है। इस हेतु (त॰ ज्या॰ ९, ११ प॰ से) ▫इउ और ▫गछ मे वह सम्बन्ध है जो ▫छज और ▫छथ आधारो मे है परन्तु (त॰ ज्या॰ ९, १ सा॰ से) ▫छज और ▫छथ मे सम्बन्ध है जो खज और खथ मे है। इस कारण (त॰ ज्या॰ ९, ११ प॰ से) ▫इउ और ▫गछ मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध खज और खथ मे है। जोकि खथ रेखा अप के समान (काटी हुई) है। इस हेतु (त॰ ज्या॰ ९, १४ प॰ से) खज और खथ मे जो सम्बन्ध है वहि खज और अप मे है। अतएव (त॰ ज्या॰ ९, ११ प॰ से) ▫इउ




आधार और ▫गछ आधारो मे जो सम्बन्ध है वहि खज और अप ऊंचाइयों मे है अर्थात् अब और खद तुल्य समानान्तर षट्तलो के ▫इउ और ▫गछ आधारो, खज और अप ऊंचाइयें अन्योन्याश्रय सम्बन्धि हैं।

१३ क्रम। जब अच और खद समानान्तर षट्तलो के आधार और ऊंचाइयें अन्योन्याश्रय सम्बन्धि हैं तो अच और खद समानान्तर षट्तल तुल्य होंगे।

१ प्रकार जब पहिले चित्रोकी न्याई ▫इउ और ▫गछ आधार तुल्य और उन पर खड़ी हुई असंग सरल रेखा उन पर

लम्ब हैं तो अच और खद पिण्ड तुल्य होंगे।

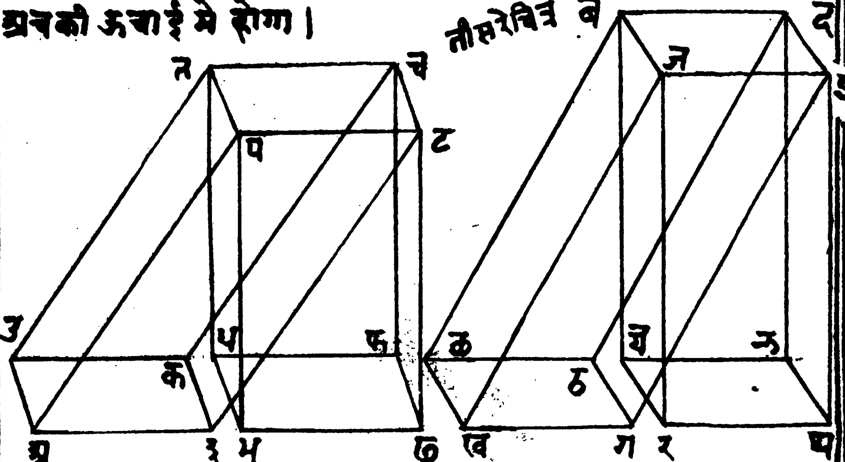
उपपत्ति। यतः ▫ङउ और ▫गछ आधारों मे जो सम्बन्ध है वहि खज और अप ऊंचाइयों मे (प्रतिज्ञाकी) है। परन्तु ▫ङउ आधार ▫गछ आधार के तुल्य (प्रतिज्ञामे) है। अतः (त॰ ज्या॰ ५, ९ मा प॰ से) खद समानान्तर षट्तल की खज ऊंचाई अच समानान्तर षट्तलकी अप ऊंचाई के तुल्य है। यतः अच और खद समानान्तर षट्तलों के आधार तुल्य हैं, और ऊंचाइयें भी तुल्य (सिद्ध हुई) हैं। अतः (त॰ ज्या॰ ११, ३१ सा॰ से) अच और खद समानान्तर षट्तल तुल्य हैं।

जब ▫ङउ और ▫गछ आधार असमान अर्थात् एक दूसरे से छोटे बडे हैं। तो कल्पना करो कि ▫ङउ आधार ▫गछ आधार से बडा है। यतः ▫ङउ और ▫गछ आधार मे जो सम्बन्ध है वहि सम्बन्ध खद समानान्तर षट्तल की खज ऊंचाई और अच समानान्तर षट्तल की अप ऊंचाई मे (प्रतिज्ञा) है। अतः (त॰ ज्या॰ ५, १० मा प॰ से) अप से खज बडा है। तो खज मे से अप के तुल्य खथ काट कर खथ ऊंचाईका दूसरे चित्रों मे खध समानान्तर षट्तल बनाया देखो। यतः अच और खध पिण्डों की ऊंचाइयें तुल्य हैं। अतः (त॰ ज्या॰ ११, ३२ सा॰ से) ▫ङउ और ▫गछ मे जो सम्बन्ध है वहि अच और खध पिण्डों मे है। परन्तु ▫ङउ और ▫गछ मे जो सम्बन्ध है वहि खज और अप मे है। इसहेतु (त॰ ज्या॰ ५, ११ मा प॰ से) खज और अप मे जो सम्बन्ध है वहि अच और खध पिण्डों मे हैं। परन्तु खथ रेखा अप के तुल्य (काटी हुई) है। इसलिये (त॰ ज्या॰ ५, १४ और ११ प॰ से) खज और खथ मे जो सम्बन्ध है वहि अच और खध पिण्डों मे

है। परन्तु (त॰ज्या॰६,१सा॰से) खज और खथ मे जो सम्बन्ध है। वहि ▫ छज और ▫ छथ मे है, तथा (त॰ज्या॰१,३२सा॰से) ▫ छज और ▫ छथ आधारो मे जो सम्बन्ध है वहि खद और खध समानान्तर षट्‌तलो मे है। इसलिये (त॰ज्या॰६,११^मा^ पं॰से) खद और खध समानान्तर षट्‌तलों मे जो सम्बन्ध है वहि अच और खध समानान्तर षट्‌तलों मे है। इस हेतु (त॰ज्या॰६,९^मा^ पं॰से) खद और अच समानान्तर षट्‌तल तुल्य हैं।

२ प्रकार। यदि अच और खद समानान्तर षट्‌तलों की उत, अप, कच, और इट; छब, खज, ठद और गउ अलग सरल रेखा उनके ▫ इउ और ▫ गछ आधारो पर लम्ब नहि हैं। तो उनके आधार और ऊचाईयें अन्योन्याश्रय सम्बन्धि होंगे। अर्थात् अच के आधार और खद के आधार मे जो सम्बन्ध है वहि खद की ऊचाई और अच की ऊचाई मे होगा।

तीसरे चित्र




उपपत्ति। कल्पना करो कि अच पिंड का ▫ इउ आधार जिस तल मे है उस तल पर ० त, प, ट, और च बिन्दुओं से लम्ब डाले जाय तो उस तल गत ध, भ, ठ और फ बिन्दुओं पर मिलते हैं, तथा चभ समानान्तर षट्‌तल बना है। ऐसे हि खद

पिण्ड का ▫गछ आधार जिस तल मे है उस तल पर ब,
त, उ, और द विन्दुओं से डालेगये लम्ब उस तल गत घ,
र, थ और क विन्दुओं मे मिलते हैं, तथा दर समानान्तर
षड् तल बना है। यतः अच और चम समानान्तर षट् त-
ल एकहि ▫टत आधार पर एकहि ऊंचाई बाले हैं। अ-
तः (यु·ज्या·१, ३९ वा १·सा·से) अच और चम तुल्य हैं।
ऐसेहि खद और दर पिण्ड भी तुल्य हैं। परन्तु अच औ-
र खद (प्रतिज्ञामे) तुल्य कहे हैं। इस हेतु चम और दर
भी तुल्य हैं। यतः चम और दर समानान्तर षट् तल तु-
ल्य हैं और उन की तथ, पम, टठ और चफ; बच, जर,
उथ और दक अलग सरल रेखा उनके ▫टत और ▫उ
व आधारो पर लम्ब हैं। अतः (पहिले प्रकारसे) टत आ-
धार और उव आधार मे जो सम्बन्ध है वहि दरकी ऊंचा-
ई और चमकी ऊचाई मे है। परन्तु ▫टत और ▫इउ तुल्य; ▫उब और ▫गछ
तुल्य हैं। इस हेतु ▫इउ और ▫गछ आधारो मे जो सम्बन्ध
है वहि सम्बन्ध दर की ऊचाइ और चमकी ऊचाइ मे है।
परन्तु चम और अच की ऊचाई एकहि है; दर
और खद की ऊंचाई एकहि है। इस कारण ▫इउ औ-
र ▫गछ आधारो मे जो सम्बन्ध है वहि खद और अच
की ऊचाइओं मे है अर्थात् अच और खद समानान्त-
र षड् तलों के आधार और ऊचाइयें अन्योन्याश्रय
सम्बन्धि हैं।

३३क्रम। जब अच और खद समानान्तर षड् तलोके
आधार और ऊचाइये अन्योन्याश्रय सम्बन्धि हैं। तो अ-
च और खद समानान्तर षट् तल तुल्य होंगे। तीसरे

चित्रोमेदेखो।
उपपत्ति। ▫इउ और ▫गक्ष आधारों मे वह सम्बन्ध है जो खद और अच की ऊंचाइयों मे है। परन्तु खद और दर की ऊंचाई एकहि है, तथा अच और चभ की ऊंचाई भी एकहि है। इसहेतु ▫इउ और ▫गक्ष आधारों मे वहि सम्बन्ध है जो दर और चभ की ऊंचाइयों मे है। परन्तु ▫इउ और ▫टत तुल्य हैं, तथा ▫गक्ष और ▫उव तुल्य हैं। इसहेतु ▫टत और ▫उव आधारों मे जो सम्बन्ध है वहि चभ और दर समानान्तर षट्तलों की ऊंचाइयों मे है। यतः चभ और दर समानान्तर षट्तलों के ▫टत और ▫उव आधारों पर खड़ी हुई अलग सरल रेखा उन आधारों पर लम्ब हैं; और उनके आधार और ऊंचाइयें अन्योन्याश्रय सम्बंधि हैं। अतः (उत्क्रमके १ प्रकार से) दर और चभ समानान्तर षट्तल तुल्य हैं। परन्तु ▫टत आधार परके चभ और अच समानान्तर षट्तलोंकी ऊंचाई एकहि है, और ▫उव आधार परके दर और खद समानान्तर षट्तलों की ऊंचाई भी एकहि है। इसहेतु (च० ज्या० १, २९ वा न० सा० से) अच और चभ तुल्य हैं; और दर और खद तुल्य हैं। परन्तु दर समानान्तर षट्तल चभ समानान्तर षट्तल के तुल्य (अबी सिद्ध होचुका) है इसकारण अच और खद समानान्तर षट्तल भी तुल्य हैं।

## ३५ साध्य

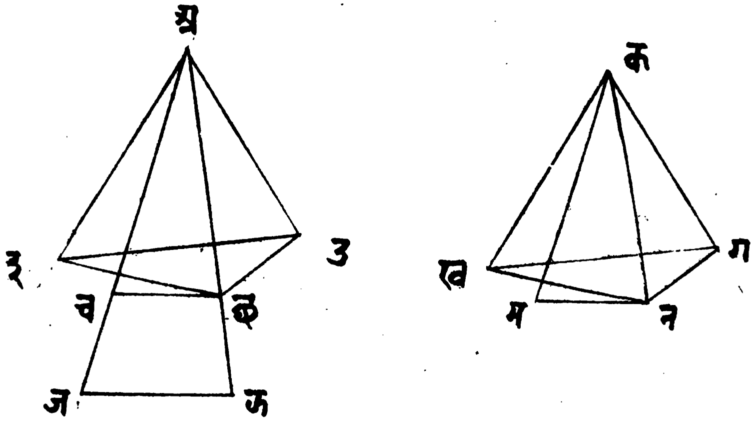
## दो तुल्य तलीय कोणके शिखरबिन्दुओं से

जिन तलों मे वे कोण हैं उनके बहिर्गत ऐसी एक२ रेखा खेंची जाय कि एक कोण को बनानेवाली एक दूसरी भुजा और उस एक रेखा के योग से बने हुए कोण, दूसरे कोण को बनानेवाली एक दूसरी भुजा और उस शेष एक रेखा के योग से बने हुए कोणो के यथाक्रम तुल्य हों। तो उन रेखाओं मे के किसी एक२ बिन्दु से प्रस्तुत तलों पर गिरे हुए लम्बों के मूलों से शिखर बिन्दुओं तक मिली हुई रेखा और प्रस्तुत रेखाओं के योग से जो दो कोण बनेंगे वे तुल्य होंगे।

कल्पना करो कि इअउ और खकग तुल्य तलीय कोण हैं, उनके अ और क शिखर बिन्दुओं से उन कोणो के तलो से बाहर की ओर अज और कम ऐसी रेखा खेंची गई हैं कि जिनसे इअज और खकम कोण तुल्य, जअउ और मकग कोण तुल्य बनते हैं; तथा अज रेखा के किसी एक ज बिन्दु से इअउ कोणगत तल पर जऊ लम्ब और कम रेखा के किसी एक म बिन्दु से खकग कोण के तल पर मन लम्ब गिरने उन तलों मे ऊ और न बिन्दुओ पर मिलते हैं। तो ऊअ और नक रेखा करने से जो जअऊ और मकन कोण बनते हैं वे तुल्य होंगे।

उपपत्ति। कल्पना करो कि अज रेखा मे से अच खण्ड कम के तुल्य काट कर च बिन्दु से जऊ रेखा के समानान्-

न्तर अजझ तल मे चछ रेखा खेंचने से अज रेखा




मे छ विन्दु पर योग करती है। यतः जझ और चछ समानान्तर हैं, और उनमे की जझ रेखा इअउ तल पर लम्ब है। अतः (घ·ज्या·१, ८ सा·से·) चछ रेखा भी उस इअउ तल पर लम्ब है। यतः अ पर का पिण्डीय कोण इअउ, इअज और उअज इन एक द्वितीयादि तलीय कोणों से बनायागया है जो क पर के पिण्डीय कोण को बनाने वाले खकग, खकम और गकम इन एक द्वितीयादि तलीय कोणों के यथाक्रम समान हैं। अतः (घ·ज्या·१ ३ सा·से·) अ और क पर के पिण्डीय कोण तुल्य हैं। अतएव उनको एक दूसरे पर मिलाकर रखने से वे एक दूसरे से सर्वांशतः मिलजायगे अर्थात् जब इअउ तलीय कोण खकग तलीय कोण मे मिलाकर रक्खाजाय तो अच रेखा कम रेख मे मिल जायगी। यतः अच रेखा कम के तुल्य (काटीहुई) है अतः च विन्दु म

विन्दु मे मिल जायगा। इसहेतु (व्यु·ज्या·८, १२ सा·से·) चछ रेखा जो इअउ तल पर लम्ब है वह उस मन रेखा मे मिलजायगी जो खकग तल पर लम्ब है। यतः अ और छ विन्दु यथाक्रम क और न विन्दुओं से मिले हैं। अतः अछ रेखा कम रेखा मे मिलती है। इसकारण अचछ त्रिभुज कमन त्रिभुज मे सर्वांशतः मिल जाता है। और चअछ कोण मकन कोण से सर्वतः मिलता है अर्थात् चअछ और मकन कोण तुल्य हैं।

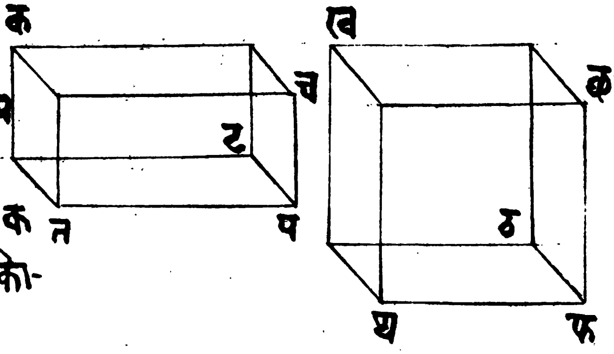
अनुमान। इससे यह स्पष्ट है कि दो तुल्य कोणोके कोण विन्दुओंसे जिन तलो मे वे कोण हैं उनके बहिर्गत ऐसी दो तुल्य रेखा खेंचीजाय कि एक कोण की एक दूसरी भुजा और उसके कोण विन्दु से खेंचीगई एक रेखा से बने हुए एक दूसरे के कोण, प्रस्तुत दूसरे कोण को बनाने वाली एक दूसरी भुजा और उसके कोण विन्दु से खेचीगई रेखा से बने हुए एक दूसरे कोणोके समान हों तो उन खेचीगई रेखाओं के अग्र विन्दुओं से प्रस्तुत कोणों के तलों पर गिराए गए लम्ब एक दूसरे के तुल्य होंगे।

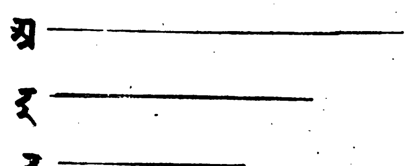
## ३६ साध्य

**जब तीन अनुपातीय रेखा हों उन को वा उन के तुल्य तीन रेखाओं को भुजमान कर एक समानान्तर षट्तल और उनकी मध्य सम्बन्धि रेखा को भुजमान कर दूसरा तुल्य**

भुज समानान्तर षट्तल बना हो, तथा एक पिण्डका एक पिण्डीय कोण जिनतीन तलीय कोणों से बना है यथाक्रम उनके तुल्य तीन तलीय कोणोंसे हि दूसरेकाभीएक पिण्डीय कोण बनाहो तो वे पिण्ड तुल्य होंगे।

कल्पना करो कि अ, इ, और उ ये तीन अनुपातीय रेखा हैं अर्थात् अ और इ मे जो सम्बन्ध है वहि इ और उ मे है; अ, इ, और उ इन तीन रेखाओं के तुल्य भुजा मान कर और इ इस एक हि रेखा के तुल्य सब भुजा मान कर जो एक और फख तुल्य कोण समानान्तर षट् तल बनाये जाते हैं वे परस्पर तुल्य होंगे।




उपपत्ति। कल्पना करो कि फख समानान्तर षट्तलमे फ विन्दु पर का पिण्डीय कोण ठफथ, ठफख और थफख तलीय कोणों से बना है और उसकी थफ, ठफ और खफ प्रत्येक भुज इ रेखा के तुल्य है। तथा एक

समानान्तर षट् तल मे प पर का पिण्डीय कोण (प्र॰ ज्या॰ १, २८ सा॰ से॰) फ पर के पिण्डीय कोण के तुल्य बना है अर्थात् प पर के पिण्डीय कोण को बनाने वाले टपत, टपच और तपच तलीय कोण फ पर के पिण्डीय कोण को बनाने वाले ठफथ, ठफछ और थफछ तलीय कोणोके यथाक्रम तुल्य बने हैं; और तप भुज अ के तुल्य, टप भुज इ के तुल्य, और चप भुज उ के तुल्य की हुई हैं। यतः तप भुज अ के तुल्य, थफ और छफ मे की प्रत्येक इ के तुल्य, और चप भुज उ के तुल्य है। अतः तप और थफ मे जो सम्बन्ध है वहि फछ और पच मे है। परन्तु तपच कोण थफछ कोण के तुल्य (बनायाहुआ) है। इसलिये (त॰ ज्या॰ ६, १४ सा॰ से॰) तच और थछ समानान्तर चतुर्भुज तुल्य हैं। यतः तपच और थफछ दो तुल्य तलीय कोणो के प, फ कोण बिन्दुओं से जिन तलो मे वे कोण है उनके बहिर्गत पट और फठ ऐसी दो तुल्य रेखा खेंची हुई हैं कि एक कोण की तप और चप एक दूसरी भुजा और उसके कोण बिन्दु से खेची गई पट रेखा के योग से बने हूए टपत और टपच कोण, दूसरे कोणकी थफ और छफ एक दूसरी भुजा और उस कोण बिन्दु से खेची गई फठ रेखा के योग से बने हूए ठफथ और ठफछ कोणो के तुल्य हैं। अतः (प्र॰ ज्या॰ १, ३५ सा॰ अ॰ से) ट और ठ बिन्दुओं से तपच और थफछ तलों पर गिराए हूए लम्ब वा एक और फख पिण्डों की ऊचाई तुल्य हैं। यतः एक और फख समानान्तर षट् तलोंके तच और थछ आधार तुल्य हैं और उन की ऊचाई भी तुल्य हैं। अतः (प्र॰ ज्या॰ १,

३१ (सा॰से) एक और फख समानान्तर षट्तल समान हैं।

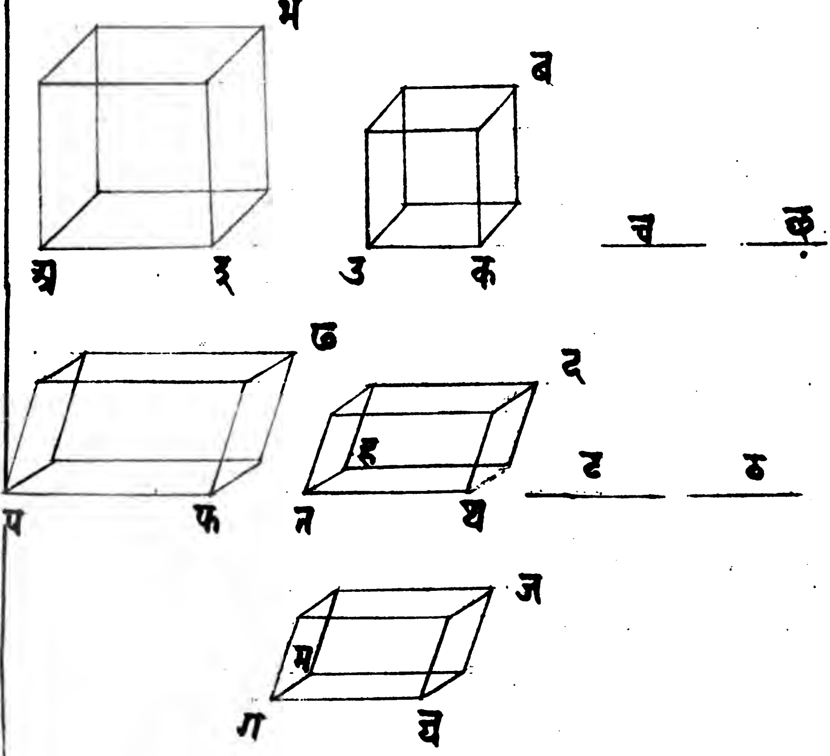
## ३७ साध्य

**जब चार अनुपातीय रेखा हों, उनमे की सम्बन्धि रेखाओं पर जो सजातीय समानान्तर षट्तल बनाए जाय अर्थात् (किनी पिंडों को वे रेखा समगुण भुजा हों) तौ वे अनुपातीय होंगे। उलटा म। जब चार रेखाओं पर यथाक्रम बने हुए सजातीय समानान्तर षट्तल अनुपातीय हों तो वे रेखा अनुपातीय होंगी।**

पहिले कल्पना करो कि अइ, उक, पफ और तथ ये अनुपातीय रेखा हैं अर्थात् अइ और उक मे जो सम्बन्ध हे वहि पफ और तथ मे है; और इनमे की अइ और उक सम्बन्धि रेखा को समगुण भुजा मान कर अभ और उव सजातीय समानान्तर षट्तल, तथा पफ और तथको समगुण भुजामान कर पढ और तद सजातीय समानान्तर षट्तल बनाए गए हैं। तो अभ और उव मे जो सम्बन्ध होगा वहि पढ और तद मे होगा।

उपपत्ति। (त॰ज्या॰६, ११ सा॰से॰) अइ, उक, च, और छ ये चार रेखा अवारित अनुपातकी तथा पफ, तथ, ट, और ठ ये भी चार रेखा अवारित अनुपात की बनालो। यतः अइ और उक मे जो सम्बन्ध है वहि पफ और तथ मे है। अतः (त॰ज्या॰६, ११ पं॰से) उक और च मे जो सम्बन्ध है वहि तथ और ट मे, तथा

च और छ मे जो सम्बन्ध ट और ठ मे है। इसलिये (न·




ज्या· ९, १९ पं·से) अइ और उक मे जो सम्बन्ध है वहि पफ और ठ मे है। परन्तु अइ और उक मे जो सम्बन्ध है वहि (उ·ज्या· १, २२ सा· अ·से), अम और उब पिण्डों मे है; ऐसे हि पफ और ठ मे जो सम्बन्ध है वहि पढ और नद पिण्डों मे है। इसहेतु (न·ज्या·९, ११ पं·से) अम और उब मे जो सम्बन्ध है वहि पढ और नद पिण्डों मे है।

दूसरा। कल्पना करो कि अम और उब पिण्डों मे जो सम्बन्ध है वहि पढ और नद पिण्डों मे है तो इनकी अइ और उक

समगुण रेखाओं मे जो सम्बन्ध है वहि पफ और तथ सम गुण रेखाओं मे होगा

उपपत्ति। कल्पना करो कि अइ और उक मे जो सम्बन्ध है वहि पफ रेखा गच रेखा से रखती है। तो गच और पफ को समगुण भुज मान कर (च॰ ज्या॰ ९, २७ सा॰ से) पछ वा तद का सजातीय गच पर गज समानान्तर यह तल बना है।

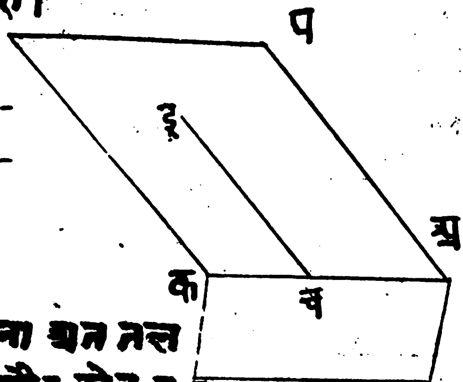
यतः अइ और उक मे जो सम्बन्ध है वहिं पफ और गच मे है; फेर अइ और उक को भुज मान कर अभ और उब सजातीय पिण्ड बने; तथा पफ और गच को भुज मान कर, पछ और गज सजातीयपिण्ड बने हैं अतः अभ और उब मे जो सम्बन्ध है वहि पछ और गज मे है। परन्तु अभ और उब मे जो सम्बन्ध है वहि पछ और तद मे (प्रतिज्ञा की हुई) है। इस हेतु (त॰ ज्या॰ ९, १५ प॰ सा॰ से) तद और गज तुल्य हैं। यतः तद और गज पिण्ड तुल्य और सजातीय हैं। अतः जिन यह और कम तलों पर वे बने हूए हैं (त॰ ज्या॰ ९, १० प॰ से॰) वे तल भी तुल्य और सजातीय हैं। अतएव (त॰ ज्या॰ ६, १० सा॰ और ९ प॰ सा॰ से) उन तलों मे की तथ और गच भुज तुल्य हैं। अब यतः अइ और उक मे जो संबन्ध है वहि पफ और गच मे है; और तथ रेखा गच के तुल्य (अबी सिद्ध हूई) है। अतः अइ और उक मे जो सम्बन्ध है वहि पफ और तथ मे है।

## १८ साध्य

**जब एक तल दूसरे तल पर लम्ब हो तो एक तल मे के किसी एक बिन्दु से दूसरे तल पर गिराया गया लम्ब उन के मिश्र छेद मे मिलेगा।**

कल्पना करो कि एक तल अन तल पर लम्ब है, अक उन का मिश्र छेद है, और एक तल मे के किसी इ बिन्दु से अन तल पर लम्ब गिराया है। तो वह लम्ब अक मे मिलेगा।

।कर्त्तव्य। एक तल मे के इ बिन्दु से अक रेखा पर (त·ज्या १,१२ सा·से) इच लम्ब करो।




उपपत्ति। यतः अक तल एक तल पर लम्ब है। अतः (घ·ज्या·२,४ प·से) इच रेखा अन तल पर लम्ब है। परन्तु इ बिन्दु से इच लम्ब के बिना अन तल पर (त·ज्या·१,१२ सा·से) और कोइ दूसरा लम्ब नहि होसकता इसहेतु इ बिन्दु से अन तल पर खेंचा हुआ लम्ब अक मिश्र छेद मेहि मिलता है।

## १९ साध्य

**समानान्तर खड तल के सन्मुख तलों की समानान्तर भुजों के तुल्य दो२ खण्ड करने वाले दो तलोंका मिश्र छेद उस समानान्**

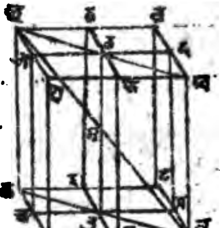
र खइ तल के कर्णसे योग करेगा, और उस योग बिन्दु पर उन दोनोंके तुल्य दोर खएड होंगे।

यतः कल्पित अब समानान्तर घइ तल के सम्मुख तलें की भुजो के इ, ग, फ, और ठ; च, प, द, और ज बिन्दुओं पर तुल्य दोर खएड करो इग, ठफ, चप, और जद रेखा मिलाने से इग और ठफ एकहि गठ तल मे तथा चप और जद एकहि चद तल मे सिद्ध होतियें हैं। क्योंकि अठ और यफ तुल्य समानान्तर हैं। इसलिये (त॰ ज्या॰ १, ३३ सा॰ से) अय और ठफ तुल्य समानान्तर हैं। ऐसेहि कम और इग तुल्य समानान्तर हैं। परन्तु अय के समानान्तर कम है इस हेतु कम और ठफ मे की प्रत्येक किसी अन्य तल गत अय के समानान्तर होनेसे (घ॰ ज्या॰, ९ सा॰ से) कम और ठफ समानान्तर हैं। तथा इग और ठफ मे की प्रत्येक अन्य तल गत कम के समानान्तर होनेसे इग और ठफ समानान्तर हैं। इसलिये इग और ठफ एकहि गठ तलमे हैं। इसी युक्ति से चप और जद एकहि चद तल मे हैं।

यतः कल्पना करो कि अब समानान्तर खइ तल के अट और यब सम्मुख तलों की भुजो के तुल्य दोर खएड करने वाले गठ और चद तलो का मिथच्छेद उउ है और अस पिएड का कर्ण अन है। तो उउ और अन किसी म बिन्दु मे मिलेगे और उस म बिन्दु पर उन दोनो के तुल्य दोर खएड होंगे।

उपपत्ति। अउ, इस, कउ और उन रेखा खैंचलो। यतः

छज और दघ दो समानान्तर रेखाओं से जद रेखायोग करती है। अतः (न·ज्या·१,२९ सा·से) छजड और खदड एकांतर कोण तुल्य हैं। परन्तु (न·ज्या·१,२४ और ३४ सा·से) छजड और खदड त्रिभुजोंमे की छज भुज खद के तुल्य और जड भुज दड के तुल्य है और इनके बीच वाले छजड और खदड कोण भी तुल्य (सिद्ध हुए) हैं। इसहेतु (न·ज्या·१,४ सा·से) छड और डख आधार तुल्य, तथा जडछ और दडख कोण तुल्य हैं। इसहेतु (न·ज्या·१,१४ सा·से) छडख एक सूधी रेखा है। इसी युक्ति से कउ रेखा उन के तुल्य, और कउन एक सूधी रेखा है। यतः छक और खन मे



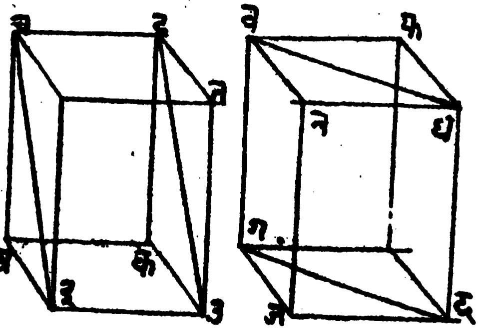
की प्रत्येक घम के तुल्य और समानान्तर है। अतः (न·ज्या·११, ९ सा·से) छक और खन भी तुल्य और समानान्तर हैं। परन्तु उनके एक ओर के क और न, कन रेखा की अवधि और दूसरी ओर के छ और ख छख रेखा की अवधी हैं। इसहेतु (न·ज्या·१,३३ सा·से) कन और छख रेखा तुल्य और समानान्तर हैं। यतः (न·ज्या·११,७ सा·से) छन और उउ एक ही तल मे हैं और असमानान्तर रेखा हैं। अतः छन और उउ अवश्यक हि म बिन्दु पर मिलेगीं। यतः कन और छख समानान्तर रेखाओं से छन रेखा योग करती है। अतः (न·ज्या·१,२९ सा·से) उनम और डछम एकान्तर कोण तुल्य हैं। यतः उनम और डछम त्रिभुजो मे उनमकोण डछमकोण के तुल्य (सिद्ध हुआ) है, और (न·ज्या·१,१५ सा·से) उमन कोण डमछ कोणके तुल्य है और तुल्य कोणोके सन्मुखकी उन और डछ भुजे भी तुल्य हैं। (क्योंकि वे कन और छख तुल्य रेखाओंकी आधी २ हैं) अतः (न·ज्या·१,२६ सा·से) इन त्रिभुजोमेकी मन भुज छम के तुल्य और उम भुज मड के तुल्य है अर्थात् डउ मिश्र छेदनमे एकन कर्ण हैं वे छयोग बिन्दु पर उन दोनों के तुल्य दो२ खण्ड हुए।

## ४० साध्य

जब एकहि उचाई के दो त्रिकोण समास्यन्तलोमे के एक का आधार समानान्तर चतुर्भुज, और दूसरेका

आधार त्रिभुज हो; परन्तु वह समानान्तर चतुर्भुज उस त्रिभुज से दूना हो तो वे दोनों समास्र तल तुल्य होंगे। कल्पना करो कि अचक टइउ और जगद नवथ समास्र तल एक ही ऊंचाई के हैं जिनमें का एक अचट और कटउ दो त्रिभुज, और अट, टइ और इक इन तीन समानान्तर चतुर्भुजों से बनाया गया; और दूसरा जगद और नवथ ये दो त्रिभुज, और नग, गध और थज इन तीन समानान्तर चतुर्भुजों से बना है; पहिले का आधार अउ समानान्तर चतुर्भुज और दूसरे का आधार जगद त्रिभुज है; और अउ समानान्तर चतुर्भुज जगद त्रिभुज से दूना है। तो अचक टइउ और गजदनवथ समास्र तल तुल्य होंगे।

उपपत्ति। अत और जफ समानान्तर षट् तल बना लो। यतः गद समानान्तर चतुर्भुज (त-ज्या-१, ३४ सा-से) जगद त्रिभुज से दूना है और उसी गजद त्रिभुज से उअ समानान्तर चतुर्भुज दूना (प्रतिज्ञा में कहा) है। अतः ग



द और अउ तुल्य हैं। यतः अत समानान्तर षट् तल का आधार और ऊंचाई यथाक्रम जफ समानान्तर षट् तल के गद आधार और ऊंचाई के तुल्य हैं। अतः (त-ज्या-१, ३१ सा-से) अत और जफ समानान्तर षट्तल तुल्य हैं। परन्तु (त-ज्या-१, २८ सा-से) अचक टइउ समास्र तल अत समानान्तर षट्तल का आधा है, तथा जगदनवथ समास्रतल जफ समानान्तर षट्तल का आधा है। इसहेतु अचकटइउ और जगदनवथ समास्रतल एक दूसरे के तुल्य हैं। ॐमेकम्।

### ओम्

### उपक्रमणिका

इस समय मे संस्कृत और हिन्दी भाषा मे व्यवहृत गणित सम्बन्धि शब्दों मे से कई शब्द तो ऐसे हैं कि जिन का व्यवहार पूर्व काल से हि संस्कृत ग्रन्थों मे चला आता है, और कई शब्द ऐसे हैं कि जो इङ्गलण्डीय राज्येश्वर के प्रताप से श्री मान्यवर्य बापू देव शास्त्री जी आदि महात्माओं के द्वारा अंगरेज़ी भाषा से संस्कृत और हिन्दी भाषामे पर्य्यस्त होकर व्यवहारोपयुक्त हुए हैं, और कई शब्द ऐसे हैं कि जो शङ्कुच्छेदक (Conic sections), घनज्यामिति (Solid Geometry), गोलीय ज्यामति (Spherical Geometry) आदिग्रन्थोंका अंगरेज़ी भाषा से हिन्दी भाषे मे अनुवाद करने के अर्थ अब मेरे द्वारा श्री मान्यवर्य श्रीयुक्त श्री बाबू नवीनचन्द्रराय जी की सहायता से अनुवादित हुए हैं । इस उपस्थित काल मे उन प्रस्तुत शब्दों मे से जितने मेरी स्मृति मे आये हैं उतने उनके अङ्गरेज़ी पर्य्यायों के सहित अधोलिखित गणिताख्य कोश मे नियुक्त किये गये हैं । विदित हो कि इस गणिताख्य कोश मे लिखे हुए जिस शब्द के पीछे ✣ऐसा वा ✤ऐसा चिन्ह किया गया है वह शब्द पूर्व काल से हि संस्कृत ग्रन्थों मे व्यवहृत है, और अब भी संस्कृत और हिन्दी मे व्यवहारोपयुक्त किया जाताहै । जिस शब्द के पीछे + ऐसा धनका चिन्ह किया गया है वह श्रीमान्यवर्य श्रीबापूदेव शास्त्री जी आदि महात्माओं के द्वारा अंगरेज़ी भाषा से संस्कृत और हिन्दी भाषामे पर्य्यस्त होकर व्यवहारोपयुक्त हूआ है । जिस शब्द के पीछे ＊ऐसा अष्ट दल वा पुष्प का चिन्ह किया गया है वह मेरे द्वारा अंगरेज़ी भाषा से संस्कृत वा हिन्दी भाषा मे अनुवादित हूआ है । जिस शब्द के पीछे × ऐसा गुणन का चिन्ह किया गया है वह शब्द आधुनिक अनुवादकों ने जिस अर्थ मे ग्रहण कियाहै उस अर्थ से हटाया गया है, और उसे हटानेका हेतु क, ख आदि पृष्टों मे आगे दिया गयाहै । जिस शब्दके निमित्त जो कुछ विशेष वक्तव्य है वह उस पृष्ट की उस पंक्ति मे देखो जोउस शब्द के अनन्तर (         ) ऐसे कोष्ट मे लिखीगई है

## गणिताख्यकोष

### गणितसम्बन्धी हिन्दी शब्द और उनके प्रतिनिधि अंगरेजी शब्द

Vocabulary of mathametical technical terms

| संस्कृत वा हिन्दी<br>Sanskrit or Hindee | अंगरेजी<br>English |
|---|---|
| अजात्यायतं† ........................ | Rhomboid |
| अतुल्यं† ........................ | Unequal |
| अधिक कोणं† ........................ | Obtuse angle |
| अधिककोणत्रिभुजं† ... ... ... | Obtuse angled trilateral |
| अधिक कोण त्र्यस्रं† . . . . . | Obtuse angled triangle |
| अधिक कोणशङ्कुं† . . . . . . | Obtuse angled cone |
| अधःस्पर्शरेखा* . . . . . | Subtangent |
| अनुपातं† . . . . . . | Proportion |
| अनुपातीयं† . . . . | Proportional |
| अनुमानं† . . . . | Corollary |
| अनेकवर्णमध्यमाहरण* . . | Quadratic equation containing more than one unknown quantity |
| अनेकवर्णसमीकरणं† . . | Equations containing more than one unknown quantity |
| अन्यो!न्याश्रय सम्बन्ध* . . . | Reciprocal proportion |
| अन्योन्याश्रय सम्बन्धि* . . | Reciprocally proportional |
| अपवर्तकं† . . . | Measure, or aliquot part, or submultiple |
| अपवर्त्यं† . . . . . | Multiple |
| अव्यक्तं† . . . . . . | Unknown |
| अव्यक्तराशिः‡ . . . . . | Unknown quantity |
| अवर्गक्षेत्र + . . . . | Rhombus |
| अबाध्योपक्रम + . . . . | Postulate |
| अवारितसम्बन्ध,*वाआवर्त्यसम्बन्ध+ | Continual ratio |
| अवारितानुपात,*वाआवर्त्यानुपात+ | Continued proportion |
| अवसारणी रेखा* . . . . | Assymptote |

| | |
|---|---|
| असमकर्म्म वा *असमीकरण* . . | Inequality |
| असम्भव† . . . . . | Impossible |
| असम्भाव्यराशि* . . . | Imaginary quantity |
| असङ्ग सरलरेखा* . . . | Insisting straight line |
| अक्ष† . . . . . | Axis |
| अक्षकेन्द्र+ . . . . . | Focus |
| अक्षकेन्द्रीय स्पर्शरेखा* . . | Focal tangent |
| अक्षार्द्ध† . . . . . | Semiaxis |
| आधार+ वा भू . . . | Base |
| आयत† . . . . . . | Oblong or Rectangle |
| आवर्त्त दशमलव+ . . . | Recurring or circulating Decimal |
| आबाधा† . . . . . | Segments of the lase of a tri angle made my a perpendicular from the opposite angle |
| आसन्न† . . . . . | Adjacent |
| आसन्नकोण+ . . . . | Adjacent angle |
| आसन्नतल* . . . . | Adjacent plane |
| आसन्नभुज+ . . . . | Adjacent side |
| अङ्क पाश† . . . . | Permutation and Combination |
| अण्डाकृति† . . . | Ellipse |
| अन्तर† . . . | Difference |
| अन्तरनिष्पत्ति+ . . . | Conversation |
| अन्तर श्रेढी† . . | Decreasing arithmetical progression |
| अन्तरित* . . . | Difference between |
| अन्तर गत† . . . | Inscribed |
| अन्तर्गत कोण+ . . | Subtended angle |
| अन्तिम† . . . . | Last |
| अन्तःकोण+ . . . | Interior angle |
| अन्तःस्पर्श* . . . | IInterval touch |
| अंश† (द्वि षात्मिक विभाग) . . | Degree |

| | |
|---|---|
| अंश‡ (अभीष्टसंख्या केअभीष्ट खण्डोंका द्योतक) | Numerator |
| इङ्गिताल गणित* | Integral calculus |
| इष्टकर्म्म‡ | Single position and double position |
| उत्केन्द्र रेखा * | Eccentricity (of an ellipes) |
| उत्क्रमनिष्पत्ति + | Invertendo |
| उत्क्रमज्या† | Versed sine |
| उद्वरेखा* | Directrix |
| उपपत्ति† | Proof |
| उपपन्न† | Proved |
| उपरिगत‡ | Circumscribed |
| उपरिगतवृत्त | Circumscribed circle |
| उभयनिष्ठ + वा सर्वनिष्ठ* | Common |
| उभयनिष्टकोण* वा सर्वनिष्ट कोण + | Common angle |
| उभय निष्टतल *वा सर्वनिष्ठ तल* | Common plane |
| उभयनिष्टभुज + वासर्वनिष्टभुज * | Common side |
| ऊंचाई‡ | Altitude |
| ऋजुभुजक्षेत्र + | Rectilinear figure |
| ऋण† | Minus |
| एकवर्णमध्यमाहरण‡ | Adfected quadratic |
| एकवर्ण वर्गसमीकरण‡ | Pure quadratic |
| एकवर्णसमीकरण‡ | Equations contaning only one unknown quantity |
| एकअनुपातके‡ | Same proportion |
| एकहीअन पात‡ | Same proportional |
| एकहीसम्बन्ध + | Same ratio |
| एकाई† | Unit |
| एकान्तर + | Alternate |
| एकान्तरकोण + | Alternate angle |
| एकान्तरचाप + | Alternate arc |
| एकान्तरचापक्षेत्र + | Alternate segments of a circle |

| | |
|---|---|
| एकान्तरचापान्तर्गतकोण + | The angles in the alternate segments of a circle |
| एकान्तर्निष्पत्ति + | Permutando or alternando |
| करणी† (एकअप्राप्तमूलराशि) | Surds |
| करणीगत राशि† | Irrational or radical quantity |
| कर्ण† | Diagonal |
| कला† | Minute |
| काल‡ | Time |
| केन्द्र† | Centre |
| केन्द्रगरेखा* | Straight line passing through the centre of a circle |
| केवलावर्त्यदशमलव* | Pure circulating decimals |
| कोटि† | Complement |
| कोटिकोण† | Complement of an angle |
| कोटिचाप† | Complement of an arc |
| कोटिछेदनरेखा‡ | Cosecant |
| कोटिज्या† | Cosine |
| कोटिस्पर्श रेखा+ | Cotangent |
| कोव्युत्क्रमज्या‡ | Coversed sine |
| कोण† | Angle |
| कोण बिन्दु+ | Angular point |
| कोष्टकीय भिन्न* | Continued fraction |
| क्रम* | Rate |
| क्रमज्या किसी व्यास की* | Ordinate of a diameter |
| क्रमज्यार्द्ध किसी व्यास की* | Semi-ordinate of a diameter |
| क्रिया कलाप* | Process |
| षड्घात+ | Sixth power |
| षड्भुज† | Hexagon |
| खण्ड† वा टुकड़ा+ | Segment |
| गुणक† | Multiplier |
| गुणकरूपअवयव + | Factors |

| | |
|---|---|
| तुल्यकोणचतुर्भुज + | Equiangular quadrilateral |
| तुल्यकोणत्रिभुज + | Equiangular trilateral |
| तुल्यकोणत्र्यस्र + | Equiangular triangle |
| तुल्यकोणदशभुज + | Equiangular decagon |
| तुल्यकोणद्वादशभुज + | Equiangular duodecagon |
| तुल्यकोणपञ्चदशभुज + | Equiangular quindecagon |
| तुल्यकोणपञ्चभुज + | Equiangular pentagon |
| तुल्यकोणबहुभुज + | Equiangular polygon |
| तुल्यकोणशङ्कु* | Equiangular cone |
| तुल्यकोणषट्भुज + | Equiangular hexagon |
| तुल्यकोणसप्तभुज | Equiangular heptagon |
| तुल्यकोणक्षेत्र | Equiangular figure |
| तुल्यकोणाष्टभुज + | Equiangular octagon |
| तुल्यकोणसमषड्भुज × | Regular hexagon |
| तुल्यकोणसमचतुर्भुज +, वा, वर्ग | Regular quadrilateral or square |
| तुल्यकोणसमदशभुज + | Regular decagon |
| तुल्यकोणसमद्वादशभुज + | Regular duodrcagon |
| तुल्यकोणसमपञ्चदशभुज + | Regular quindecagon |
| तुल्यकोणसमपञ्चभुज +, वा, समस्रसमपञ्चभुज* | Regular pentagon |
| तुल्यकोणसमबहुभुज वा समास्रसमबहुभुज | Regular polygon |
| तुल्यकोणसमसप्तभुज + | Regular heptagon |
| तुल्यकोणसमाष्टभुज + | Regular octagon |
| तुल्यदूरज्या* | Cords equally distant from the centre |
| तृतीयकोण* | Third angle |
| तृतीयसंबंधि + | Third proportional |
| त्रिकालीकृतसंबंध | Triplicate ratio |
| त्रिकोण | Triangle |

| | |
|---|---|
| त्रिकोणमिति + | Trigonometry |
| त्रिज्या☸ | Radius |
| त्रिभुज☸ | Trilateral |
| त्रिभुजान्तर्गतवृत्त + | Circle inscribed in a triangle |
| त्रिभुजोपरिस्थवृत्त + | Circle described about a triangle |
| त्रिमूलीकृतसंबंध* | Subtriplicate ratio |
| त्रिवर्णमध्यमाहरण* | Quadratic equation containing three unknown quantities |
| त्रिवर्णसमी करण* | Equations containing three unknown quantities |
| त्रैराशिक☸ | Rule of three |
| दशभुज☸ | Decagon |
| दशमलव + | Decimal |
| दशमलवभिन्न + | Decimal fraction |
| दशमूलक घातप्रमापक + वा व्यावहारिक घातप्रमापक + | Common logarithms |
| दहाई + | Tens |
| दलांशल और इङ्गिताल गणित* | Differential and Integral calculus |
| दलांशल गणित* | Differential calculus |
| द्वादशभुज☸ | Duodecagon |
| द्विकलीकृतसंबंध* | Duplicate ratio |
| द्विगुणित☸ | Double |
| द्वितीय + | Second |
| द्वितीयपदी य + | Second quadrantal |
| द्वितीय मूल* | Second root |
| द्वितीयासजातीय + | Cosequents |
| द्विमूलीकृत संबंध* | Subduplicate ratio |
| द्विवर्णमध्यमाहरण* | Quadratic equation containing two unknown quantities |
| द्विवर्णसमीकर्ण† | Equations containing two unknown quantities |
| धन☸(योगद्योतक) × | Plus |
| धरातल + | Superficies |
| ध्रुव☸ | Pole |

| | |
|---|---|
| निर्दिष्ट‡ | Given |
| नौकाकृतिपृष्ट,वा इन्दुपृष्ट* | Lunary surface |
| न्यूनकोण‡ | Acute angle |
| न्यूनकोणत्रिभुज + | Acute angled trilateral |
| न्यूनकोणत्र्यस्र + | Acute angled triangle |
| न्यूनकोणशङ्कु* | Acute angled cone |
| न्यूनसंबंध + | Ratio of less inequality |
| पद(किसीराशिका धन,वाऋण खण्ड) | Term |
| पद +,वा,वृत्तपाद† | Quadrantal |
| परकीय | Negative |
| परकीयघात* | Negative power |
| परकीयराशि* | Negative quantity |
| परामिति* | Parameter (in ellipse and hyperbola) |
| परिधि‡ | Circumference |
| परिधिकोण + ,वा, पालीकोण + | Angle at circumference |
| परिभाषा + | Definition |
| पहाडा + | Table |
| पक्षान्तरानयन† | Transposition |
| पाद† | Quarter |
| पिण्ड* | Solid |
| पिण्डीयकोण* | Solid angle |
| पूर्णज्या‡ | Cord or chord |
| पूर्णांक† | Whole number |
| पृष्ट† | Surface |
| पञ्चघात + | Fifth power |
| पञ्चदशभुज† | Quidecagon |
| पञ्चभुज‡ | Pentagon |
| पञ्चराशिक† | Double rule of three |
| प्रतिवर्ष‡ | Per annum |

| | |
|---|---|
| प्रतिसारीछेद* | Subcontrary section |
| प्रतिसैंकड़ा , सोपर,वा फीसैंकड़ा + | Percent |
| प्रतिज्ञा* | Hypothesis |
| प्रथम + | First |
| प्रथमपदीय + | First quadrantal |
| प्रथमासजातीय + | Homologous antecedents |
| प्रधानाक्ष* | Transverse |
| प्रधानाक्ष*;वा वृहदक्ष* | Transverse or transverse axis (in hyperbola |
| प्रश्न† | Problem |
| प्राप्तमूल राशि* | Rational quantity |
| प्रावृति अर्थात् सर्वैभुक्त* | Perimeter |
| प्रावण्य* | Inclination |
| प्रावण्यपृष्ट* | Convex |
| प्रावण्यास्य* | Concave |
| फलक† | Tetrahedron |
| बड़ा अपेक्षा + | Greater than |
| बहुतल* | Polyhedron |
| बहुभुज + | Polygon |
| विन्दु† | Point |
| बीजगणित† | Algebra |
| वृत्त† | Circle |
| वृत्तखण्ड +,वा, वृत्तांशक्षेत्र + | Sector of a circle |
| वृत्तखण्डनीरेखा + | A straight line which cuts a circle |
| वृत्तार्द्ध† | Semi circle |
| वृत्तान्तर्गतऋजुभुज + | Rectilineal figure inscribed in a circle |
| वृत्तोपरिस्थऋजुभुज + | Rectilineal figure described about a circle |
| वृहत्सम्बन्ध + | Ratio of greater inequality |
| वृहदक्ष* | Transverse or transverse axis |
| व्यक्त† | Known |

| | |
|---|---|
| व्यक्तराशिः | Known quantity |
| व्यवकलनं | Subtraction |
| व्यवकलनफलं | Balance |
| व्यवहारिक गणित | Practice |
| व्याज+ वा कलान्तरं | Interest |
| व्यासः | Diameter |
| व्यासार्द्धः | Semi diameter |
| भजनफलं | Quotient |
| भागं | Division |
| भागजातिः | Simple fraction |
| भागप्रभागं | Compound fraction |
| भागा+ | Divided by |
| भागानुबन्धं | Mixed fraction |
| भाजकं | Divisor |
| भाज्यं | Dividend |
| भाण्डप्रतिभाण्डः | Barter |
| भिन्नं | Fraction |
| भुजः | Side |
| भ्रमण* | Locus |
| मद्नाकृति* | Cylinder |
| मद्नाकृतिपृष्ट* | Cylindric surface |
| मध्य* | Middle |
| मध्यविन्दु* | Middle point |
| मध्यमाहरणं | Quadratic equation |
| मध्यसंबंधि+ | Mean proportional |
| महत्तमापवर्त्तकं | Greatest common measure |
| मापक* | Gnomon |
| मापक गणित* | Mensuration |
| मिश्र गुणनं | Compound multiplication |

| | |
|---|---|
| मिश्र छेद* | Common section |
| मिश्र धन† | Amount |
| मिश्र व्यवकलन‡ | Compound subtraction |
| मिश्र व्यास,* उभयनिष्टव्यास+, वा सर्वनिष्टव्यास* | Common diameter |
| मिश्रभाग+ | Compound division |
| मिश्रभिन्न† | Compound fraction |
| मिश्रसङ्कलन+ | Compound addition |
| मिश्रसम्बन्ध* वा समसम्बन्ध+ | Common ratio |
| मिश्राऽऽवर्त्त्य दशमलव+ | Mixed circulating decimals |
| मूलक्रिया+ | Evolution |
| मूलद्योतकचिन्ह* | Radical sign |
| मूलधन† | Principal |
| योग†(जोसंकलनफलका बोधकहै) | Sum |
| योग†(मिलापबोधक) वा मेल+ | Junction |
| योगनिष्पत्ति+ | Componendo |
| योगान्तरश्रेढी† | Arithmetical or equidifferent progression |
| राशि† (वृत्तकाद्वादशभाग वा ३० चेत्रिकअंशोंका बोधक) | Signs of zodiac |
| राशि†(एक समूहका बोधक) | Quantity |
| रेखा† | Line |
| लघुतमसमापवर्त्त्य+ | Least common multiple |
| लघ्वक्ष* | Conjugate or minor axis |
| लम्ब† | Perpendicular |
| वक्र* | Curve |
| वर्ग† | Square |
| वर्गमूल† | Square root |
| वर्गसमीकरण+ वा मध्यमाहरण† | Quadratic equation |
| वहिर्वक्र* | Hyperbola |

| | |
|---|---|
| वहिर्वंक्रकावहिखण्ड* वावहिरंश* | Sector of a hyperbola |
| वहिर्वंक्रकीअविसारिणीरेखा* | Assymptote of hyperbola |
| वहिःकोण+ | Exterior angle |
| वहिःक्रमज्या | External ordinate |
| वारद्योतक + वा विशेषणाङ्क+ | Coefficient |
| विकला‡ | Second |
| विचार‡ | Reason |
| विभाग,†भाग‡ वा हिस्सा+ | Part |
| विलोमगणित† | Reverse process |
| विषमकोण त्रिभुज+ | Unequal angled triangle |
| विषमचतुर्भुज+ | Trapezium |
| विषमभिन्न† | Improper fraction |
| विषमत्रिभुज† | Scalen trilateral |
| विषममदनाकृति* | Oblique cylinder |
| विषमशङ्कु | Oblique cone |
| विषमसमानांतरखट्तल | Oblique parallelopiped |
| शलाका* | Bar |
| शाखा† | Branch |
| शिखर* | Vertex |
| शिखरविन्दु* | Point of vertex |
| शिखा* | ¼parameter (in the parabola) |
| शीर्षकोण+ | Vertical angle |
| शीर्षवहिःकोण+ | Exterior vertical angle |
| शूची † | Pyramid |
| शून्य† | Zero or cipher |
| शृङ्खल* | Vinculum |
| शेष† | Remainder |
| शङ्कु* | Cone |
| शङ्कुछेदक* | Conic section |
| शङ्कुपृष्ठ* | Conic surface |

| | |
|---|---|
| श्रेढ़ी† | Progression |
| सजातीय+ | Similar |
| सजातीयऋजुभुज+ | Similar rectilinears |
| सजातीयचतुर्भुज+ | Similar quadrilaterals |
| सजातीयचाप + | Similar arcs |
| सजातीयचापक्षेत्र+ | Similar segments of circles |
| सजातीयत्रिभुज† | Similar trilaterals |
| सजातीयदशभुज† | Similar decagons |
| सजातीयद्वादशभुज† | Similar duodecagon |
| सजातीयपिण्ड† | Similar solids |
| सजातीय पञ्चदशभुज† | Similar quindecagon |
| सजातीयपञ्चभुज† | Similar pentagon |
| सजातीयबहुभुज† | Similar polygon |
| सजातीय वृत्तखण्ड+ वा सजातीय वृत्तांश क्षेत्र+ | Similar sector of circle |
| सजातीयभुज† वा समगुणभुज * | Homologous sides |
| सजातीयमद्नाकृति* | Similar cylinders |
| सजातीयशंकु* | Similar cones |
| सजातीयषड्भुज† | Similar hexagons |
| सजातीयसप्तभुज† | Similar heptagons |
| सजातीयक्षेत्र† | Similar figures |
| सजातीयाष्टभुज‡ | Similar octagons |
| सम्मुख‡ | Opposite |
| सम्मुखकोण‡ | Opposite angle |
| सम्मुखतल* | Opposite plane |
| सम्मुखभुज† | Opposite side |
| सम्मुखवहिर्वक्र* | Opposite hyperbola |
| सप्तघात † | Seventh power |
| सप्तभुज† | Heptagon |

| | |
|---|---|
| सप्तममूल* | Seventh root |
| समऋजुभुज+ | Equilateral rectilinear |
| समकोण+ | Right angle |
| समकोणत्रिभुज+ | Right angled trilateral |
| समकोणत्र्यस्र+ | Right angled triangle |
| समकोणपरिवर्त्तक्रम* | Rectangular hyperbola |
| समकोणशङ्कु* | Right angled cone |
| समचतुर्भुज† | Equilateral quadrilateral |
| समचाप‡ | Equal arcs |
| समचापक्षेत्र† | Equal segments of a circle |
| समच्छेद, समहर, वा सवर्णितहर‡ | Common denominater |
| समत्रिभुज† | Equilateral trilateral |
| समत्र्यस्र‡ | Equilateral triangle |
| समत्र्यस्रनखतल* | Icosahedron |
| समत्र्यस्राष्टतल* | Octahedron |
| समदशभुज‡ | Equilateral decagon |
| समद्वादशभुज‡ | Equilateral duodecagon |
| समद्विबाहुक‡ वा समद्विबाहुक त्रिभुज‡ | Isosceles trilateral |
| समपञ्चदशभुज‡ | Equilateral qulndecagon |
| समपञ्चभुज† | Equilateral pentagon |
| समबहुभुज‡ | Equilateral polygon |
| समवृत्तखण्ड+ | Equal sectors of circle |
| समभिन्न+ | Proper fraction |
| समभुज† | Equilateral |
| सममदनाकृति* | Right cylinder |
| समशङ्कु* | Right cone |
| समषड्भुज† | Equilateral hexagon |
| समसप्तभुज† | Equilateleal heptagon |

| | |
|---|---|
| सम (जिसे जिस्त कहते हैं) | Even |
| समसम्बंध + | Ratio of equality |
| समान †, बराबर +, तातुल्य ‡ | Equal to |
| समानसंबंध† | Equal ratio |
| समानसंबंधि‡ | Equirational quantity |
| समानानुपात† | Equal proportions |
| समानांतर + | Parallel |
| समानांतरखट्तल* | Parallelopiped |
| समानांतरचतुर्भुज‡ | Parallelogram |
| समानांतरछेद* | Parallel section |
| समानांतरतल* | Parallel plans |
| समानांतरसरलरेखा† | Parallel straight lines |
| समान्तरवक्र* | Parabola |
| समापवर्त्तक + | Common measure |
| समापवर्त्य + | Common multiple |
| समाष्टभुज‡ | Equilateral octagon |
| सवास्रतल* | Prism |
| समास्त्रसमवहुतल* | Regular polyhedron |
| समीकरण‡ | Equation |
| समेष्वस्त्रभुजेनतल* | Duodecahedron |
| सरल‡ | Straight |
| सरलकोण + | Rectilinear angle |
| सरलरेखा‡ | Straight line |
| साधक* | Lemma |
| साधारणव्याज + | Simple interest |
| साधारणभिन्न + | Vulgar fraction |
| साधारणसमीकरण + | Simple equation |
| सिरा वा प्रान्तभुज + | Leg |
| सकलन† | Addition |

| | |
|---|---|
| संगृहीतसम्बध + | The ratio compounded of the ratio |
| संगृहीतानुपात + | The proportion compounded of the proportion |
| संबंध + | Ratio |
| संबधकोप्रथमा + | Antecedent of ratio. |
| संबधकोद्वितीया + | Consequent of ratio |
| संसम्बंधि* | Conjugate |
| संबंधिव्यास* | Conjugate diameter |
| संबंध्यच* | Conjugate axis ( in hyperbola ) |
| संबंध्यच*, वा लघुच* | Conjugate or minor axis |
| संमुखबहिर्वक्र* | Opposite hyperbola |
| संशोध्य‡ | Minuend |
| संशोध्यमान† | Subtrahend |
| स्थिर* | Constant |
| स्थिरराशि* | Constant quantity |
| स्थिरसंबंध* | Constant ratio |
| स्थिरानुपात* | Constant proportion |
| स्पर्द्धि† | Supplement |
| स्पर्द्धिकोण† | Supplement of angle |
| स्पर्द्धिचाप ‡ | Supplement of arc |
| स्पर्शतल* | Tangent plane |
| स्पर्शबिन्दु + | Touching point |
| स्पर्श रेखा + संपातरेखा × (खपृष्ठको १८वींपंक्तिमेदेखो) | Tangent |
| स्वयंसिद्ध + | Axiom |
| हर‡ | Denominator |
| क्षेत्र† | Figure |
| क्षेत्रकोस्थिति*वा पिण्डकोस्थिति* | Position |
| क्षेत्रफल† | Area |

समाप्तम्